مقدمه

- Unsaturated Soil Mechanics in Engineering Practice

By:

D. G. Fredlund

H. Rahardjo

M. D. Fredlund

مقدمه

- درس مکانیک خاک های غیر اشباع مشتمل بر بخش های زیر است:
  - مقدمه
  - خواص و طبیعت خاک های غیر اشباع
  - متغیرهای تنش در خاک های غیر اشباع
  - اندازه گیری و تخمین مکش خاک
  - جریان آب در خاک غیر اشباع
  - مقاومت برشی خاک های غیر اشباع
  - کاربرد مقاومت برشی در تعادل حدی
  - تغییرشکل در خاک های غیر اشباع

مقدمه

- مکانیک خاک مشتمل بر ترکیبی از مکانیک مهندسی، رفتار خاک و خواص آن می‌باشد.
- مصالح خاکی زیادی وجود دارند که در اجرا رفتاری متفاوت نسبت به آنچه مکانیک خاک کلاسیک و مفاهیم خاک یادآور می‌شود؛ از خود بروز می‌دهند.
- در واقع، حضور دو فاز یا بیشتر سیال در خاک، رفتار خاک را نسبت به خاک‌های کاملاً اشباع و یا خشک دچار تغییر کرده و برای مهندسان ژئوتکنیک موضوعی بحث بر انگیز جلوه می‌نماید.

مقدمه

اهمیت علم مکانیک خاک‌های غیر اشباع در موارد زیر چشمگیر می‌باشد:

- فرآیند خاکبرداری، بازسازی و تراکم خاک‌ها
- حضور سطح آب زیرزمینی در نزدیکی لایه‌های سطح زمین
- قرضه‌های طبیعی سطح زمین
- خاک‌های تورم‌زا و منبسط شونده همچون خاک‌های رسی با پلاستیسیته بالا
- خاک‌های رمبنده (حساس به افزایش رطوبت و خیس‌شدگی) همچون خاک‌های سیلتی سست.

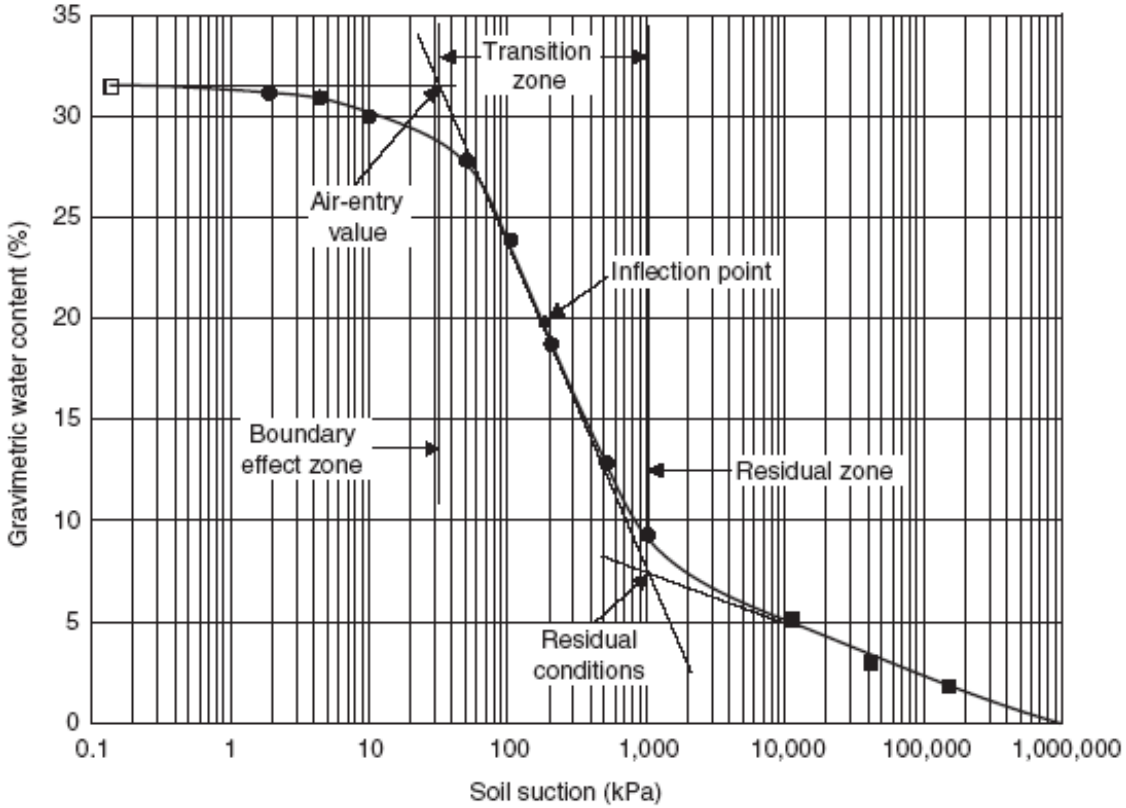
مقدمه

- همانگونه که از نام خاک غیر اشباع بر می‌آید، بسته به میزان درجه اشباع، خاک رفتار متفاوتی را از خود نشان می‌دهد.
- بسته به میزان درجه اشباع می‌توان چهار فاز متفاوت را دسته‌بندی نمود.

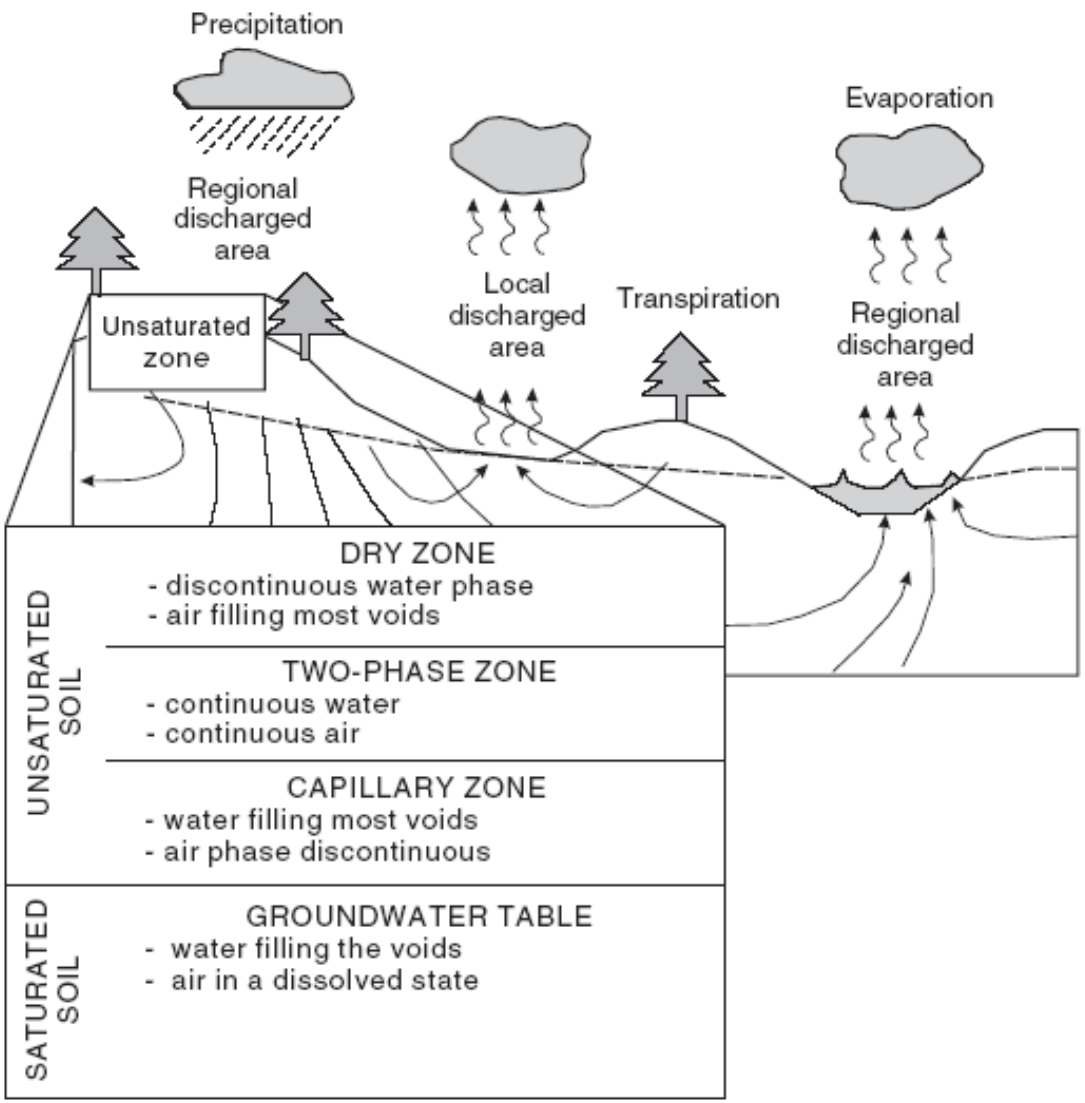
کلی	جزئی	توصیف	درجه اشباع
نیمه اشباع	ناحیه خشک	– فاز آب، ناپیوسته – بیشتر فضای خالی، پر شده از هوا	۰–۱۵
	ناحیه دو فازی	– فاز آب، پیوسته – فاز هوا، پیوسته	۱۵–۹۰
	ناحیه مویینگی	– بیشتر فضای خالی، پر شده از آب – فاز هوا، ناپیوسته	۹۰–۱۰۰
اشباع	ناحیه آب زیر زمینی	– آب، تمام فضای خالی را پر کرده است – هوا در حالت حل نشده	۱۰۰

مقدمه

- تغییرات فشار آب حفره ای در محدود خاک غیر اشباع از مقدار صفر در سطح ایستابی تا ۱۰۰۰ مگاپاسکال در شرایط خشک خاک می باشد.



مقدمه

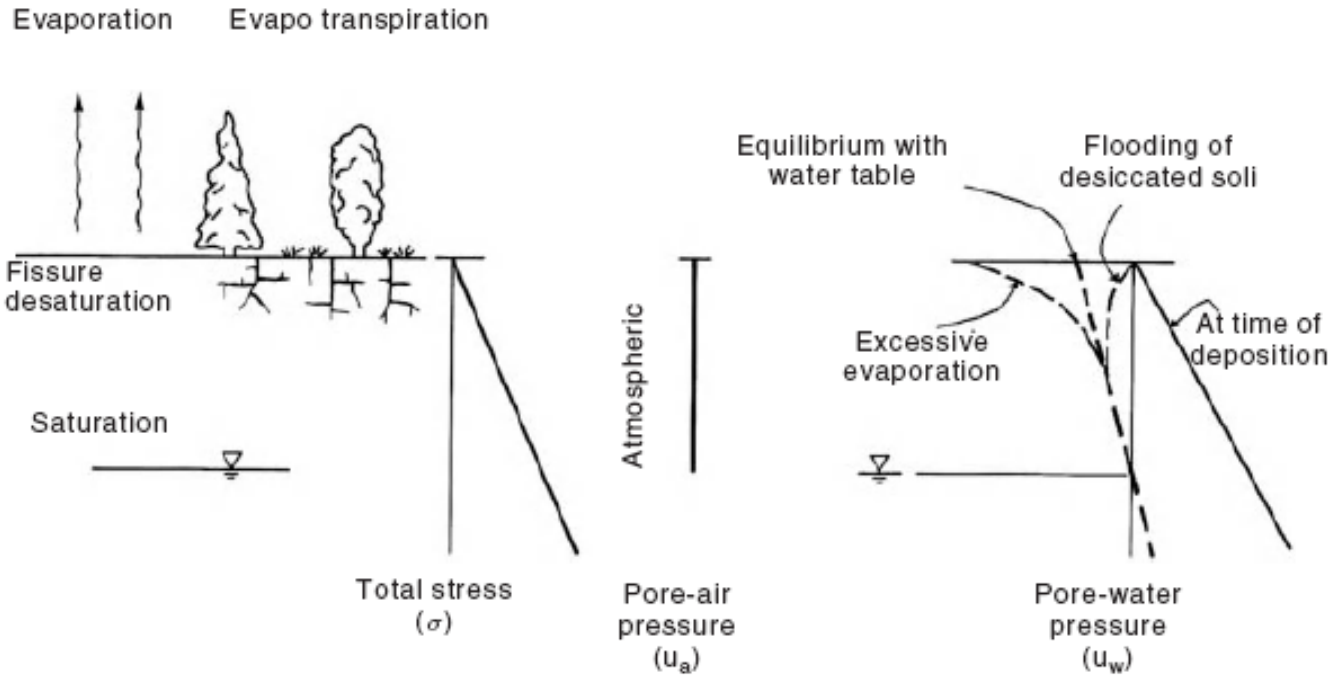


- حالت آب زیرزمینی در بالای خط ایستابی (Phreatic line) را اصطلاحا Vadose zone نامند.

- در واقع منطقه غیر اشباع، منطقه انتقالی فشار آب از حالت فشار آب در خاک تا فشار آب در اتمسفر می باشد.

مقدمه

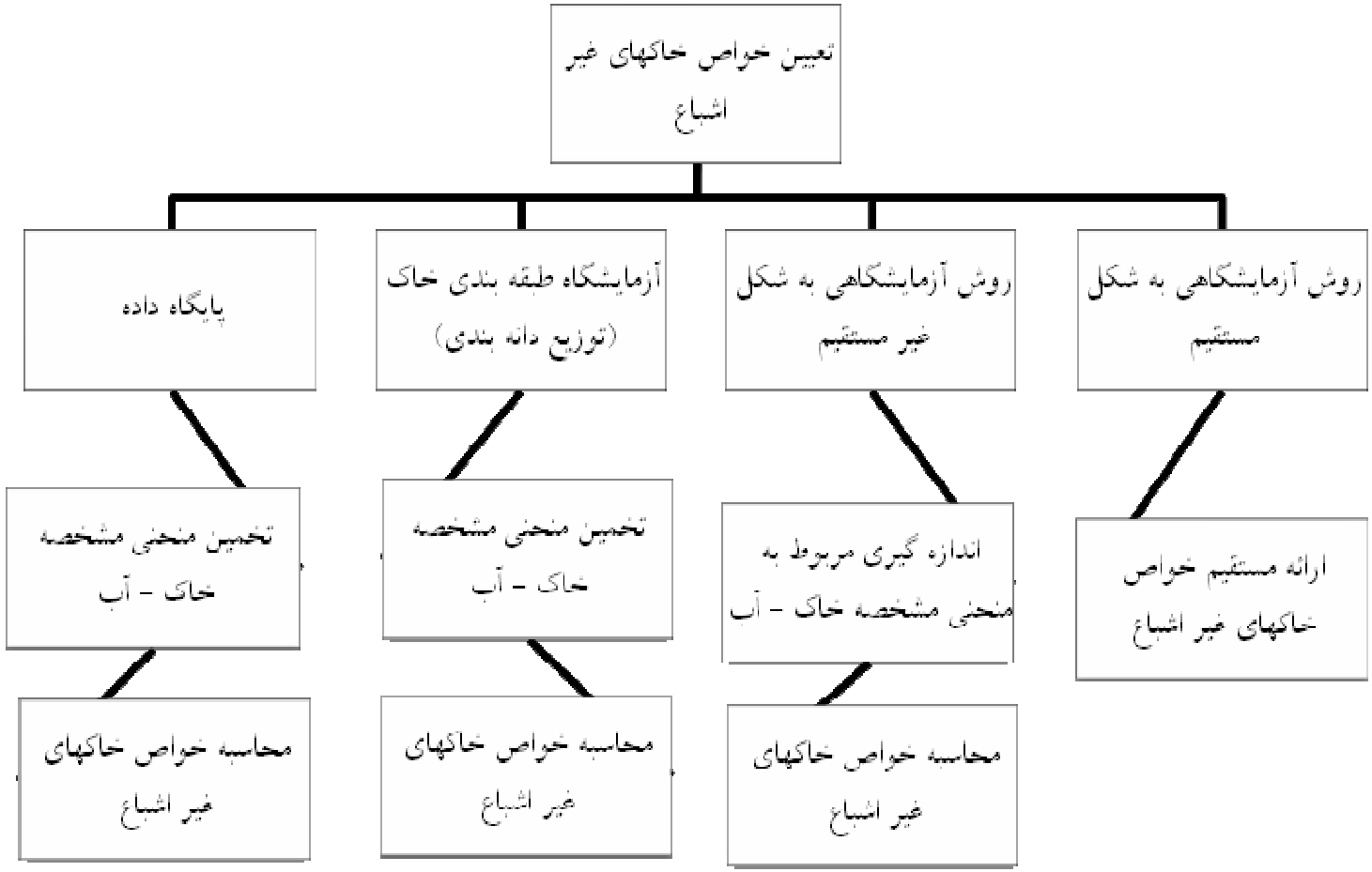
- ورود آب از طریق بارش و خروج آن از طریق تبخیر سطحی خاک یا تبخیر از طریق پوشش گیاهی، موجب تشکیل سطح ایستابی و توزیع فشار آب حفره ای
- ریشه گیاهان موجب افزایش مکش (فشار آب حفره ای منفی) در سطح خاک می شود.



تخمین خواص خاک‌های غیر اشباع

- اخیراً ابزار اندازه‌گیری آزمایشگاهی پارامترهای خاک‌های غیر اشباع پیشرفت زیادی داشته و برای اکثر خاک‌ها قابل تعیین می‌باشد.
- اما این فرآیند، بسیار وقت‌گیر و پر هزینه می‌باشد.
- بنابراین، روش‌های مختلفی جهت تخمین پارامترهای فیزیکی و مکانیکی خاک‌های نیمه اشباع بکار گرفته می‌شود.
- روش‌های تعیین خواص خاک‌های غیر اشباع مطابق با جدول است.

تخمین خواص خاک‌های غیر اشباع



تخمین خواص خاک‌های غیر اشباع

- در روش تعیین آزمایشگاهی به شکل مستقیم، بیشتر در موارد تحقیقاتی یا مواردی که دارای اهمیت زیاد می‌باشد استفاده می‌شود. در این روش به تعیین نیروهای مکش پرداخته و روش پیچیده و پرهزینه‌ای می‌باشد.
- بقیه روش‌ها می‌تواند براساس روش‌های نوین همچون منحنی مشخصه آب – خاک (SWCC: Soil-Water Characteristic Curve) انجام شود.
- SWCC رابطه بین درصد رطوبت خاک با نیروی مکش خاک را شرح می‌دهد.
- روش تعیین آزمایشگاهی به شکل غیر مستقیم همچون آزمایش صفحه فشاری، برای استفاده در روش SWCC می‌باشد.
- روش دانه‌بندی خاک (با مقداری تقریب) روشی است که با داده‌های آن و استفاده در روش SWCC، پارامترهای خاک‌های غیر اشباع تعیین می‌گردد.

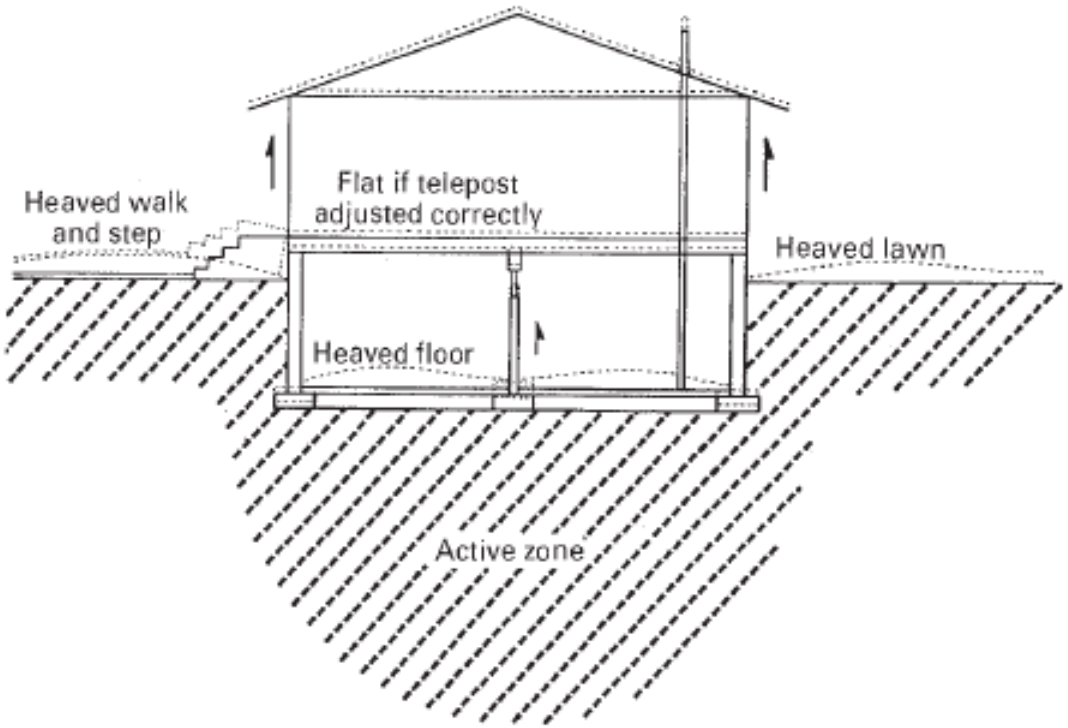
نیاز به علم مکانیک خاک غیر اشباع

- تورم خاک‌های رسی در سراسر جهان شایع بوده و محققین و مهندسان از آن به عنوان یک خطر پنهان یاد می‌کنند.
- به دلیل عدم وجود یک راه‌حل علمی مناسب، مطمئناً تکنولوژی مناسب برای بررسی رفتار خاک‌های غیر اشباع نیاز می‌باشد.
- تکنولوژی که باید عملی، با هزینه نه چندان زیاد، بر پایه تئوری خوب و با مفهوم موازی با مکانیک خاک‌های اشباع باشد.

نیاز به علم مکانیک خاک غیر اشباع

- از جمله مواردی است که مستقیماً رفتار غیر اشباع مطرح می‌گردد
- سدهای خاکی، شیروانی‌های خاکی، پی واقع بر بستر با سطح بالای آب زیرزمینی، خاکبرداری در خاک‌های مرطوب، سازه‌های واقع بر خاک‌های متورم شونده (فعال)؛
- مهندس ژئوتکنیک می‌بایست درک عمیقی از مسائل تراوش، تغییر حجم و مشخصه‌های مقاومت برشی خاک‌های غیر اشباع داشته باشد.
- فشار منفذی منفی از عمده مسائل مربوط به خاک‌های نیمه اشباع به خصوص در مورد خاک‌های رسی متورم شونده می‌باشد.

نیاز به علم مکانیک خاک غیر اشباع



Common ground movements associated with a house with basement foundation constructed in expansive soils (Hamilton, 1977).

نیاز به علم مکانیک خاک غیر اشباع

State Variable Stage
- Stress state
- Deformation state

Constitutive Stage
- Soil-water characteristic curve
- Flow laws
- Shear strength equation
- Stress-versus deformation, etc

Formulation Stage
- Derivation pertaining to an element
- Partial differential equation

Solution Stage
- Numerical modeling mode
- Boundary values applied

Design Stage
- Application of the computer
- Use of "what if ---" scenarios

Verification and Monitoring Stage
- Observational approach

Implementation Stage
- Accepted as part of prudent engineering practice

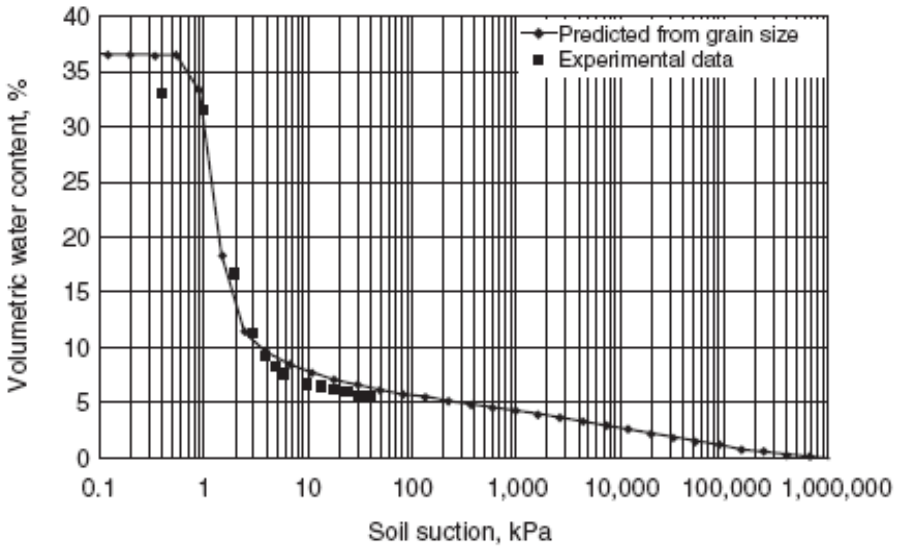
مقدمه

- خاک غیر اشباع به طور معمول با سه فاز جامد، آب و هوا شناخته می‌شود.
- در حالیکه بهتر آنست تا فاز چهارمی به نام وجه مشترک آب و هوا نیز مشخص شود.
- در مورد ضخامت این لایه بیشتر محققین بر مقدار ۵ آنگسترم توافق دارند.
- این وجه مشترک همچون غشای نازک فضای بین آب و هوای درون حفرات را جدا نموده و سبب تغییر درصد رطوبت، تغییر حجم و تغییر مقاومت برشی در خاک غیر اشباع می‌گردد.

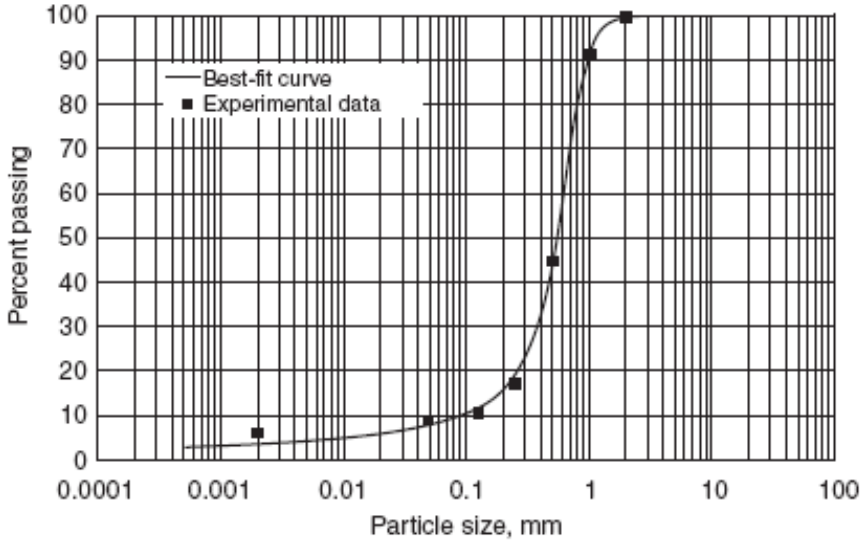
طبقه‌بندی خاک

➢ منحنی دانه‌بندی خاک

- منحنی دانه‌بندی نماینده خوبی از توزیع حفرات بوده و براساس آن با تخمین خوبی می‌توان منحنی مشخصه آب–خاک (SWCC) را تشکیل داد.



ب) منحنی پیش‌بینی شده و اندازه‌گیری شده SWCC



الف) منحنی دانه‌بندی ماسه

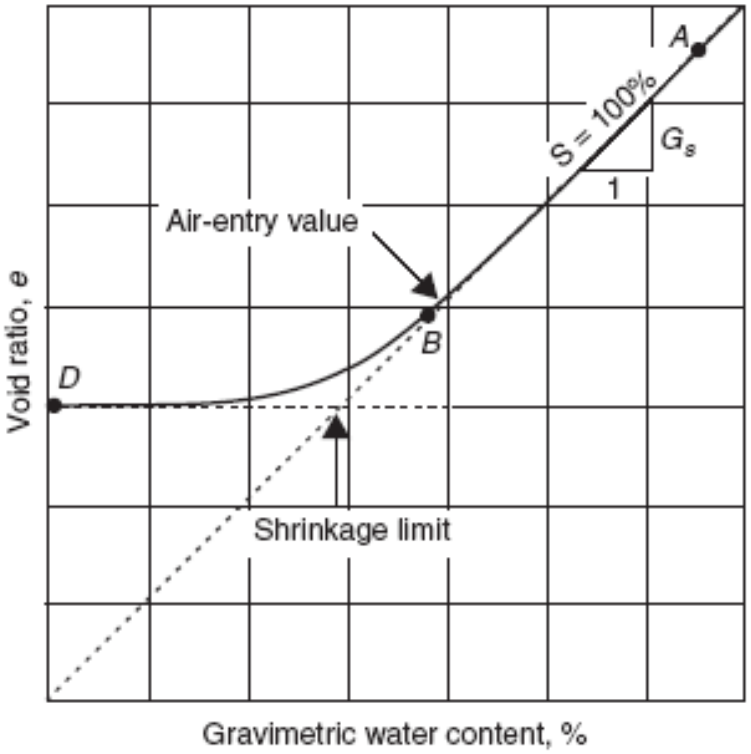
طبقه‌بندی خاک

حدود آتربرگ

- منحنی انقباضی مربوط به تغییرات رفتاری خاک با توجه به تغییر درصد رطوبت وزنی آن می‌باشد.
- در خاک‌های رسی با کاهش درصد رطوبت از حد مایع، مقاومت برشی خاک به دلیل افزایش نیروی مکش افزایش می‌یابد.
- بیشتر خاک‌ها با رسیدن به حد خمیری شروع به کاهش درجه اشباع می‌نمایند. به عبارت دیگر با کاهش رطوبت از حد خمیری نمونه به کاهش حجم ادامه داده تا آنکه با رسیدن به حد انقباض، کاهش حجم متوقف و حجم نمونه ثابت می‌گردد.

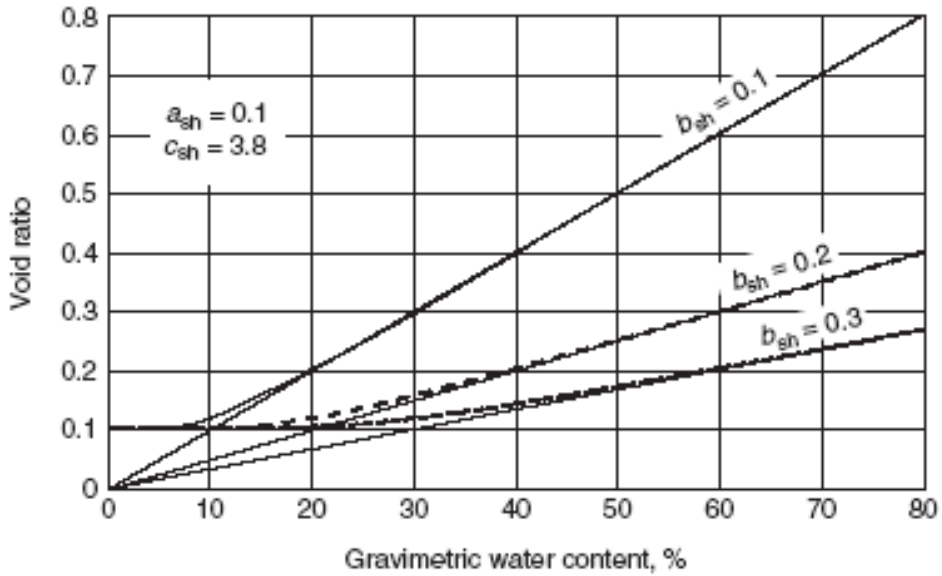
طبقه‌بندی خاک

- نقطه B که حدود رطوبت حد خمیری را نشان می‌دهد، محدوده‌ای است که با کاهش رطوبت، هوا وارد محدودهٔ توده خاکی شده (نقطه ورود هوا) و به عبارتی درجه اشباع از ۱۰۰ درصد رو به کاهش رفته و موجب افزایش تدریجی نیروی مکش می‌گردد.



طبقه‌بندی خاک

$$e(w) = a_{sh}\left[\frac{w^{c_{sh}}}{b_{sh}^{c_{sh}}} + 1\right]^{1/c_{sh}}$$



a_{sh} = minimum void ratio, e_{min},
b_{sh} = slope of the line of tangency,
c_{sh} = curvature of the shrinkage curve,
$a_{sh}/b_{sh} = G_s/S$ = constant for a specific soil, and
w = gravimetric water content.

پوست انقباضی

- این پوست در مرز بین هوا و آب قرار می گیرد.
- بارزترین مشخصه پوست انقباضی، توانایی آن در اعمال نیروی کششی است.
- این سطح همچون یک غشای الاستیک تحت کشش از میان خاک‌های غیراشباع عبور نموده است.
- این سطح چهارمین فاز (سه تای دیگر آب، خاک و هوا می‌باشد) اصلی در خاک‌های غیر اشباع می‌باشد که شناخت آن موجب درک بهتر و عمیق‌تر از متغیرهای حالت تنشی در خاک‌های غیراشباع می‌گردد.
- از دید روابط حجمی-وزنی، به دلیل حجم کم اشغالی توسط این فاز می‌توان مقدار حجم آن را نادیده گرفته و از نظر وزنی می توان به عنوان قسمتی از وزن آب آزاد در نظر گرفت.

کشش سطحی

- در خاک غیر اشباع فشار هوا u_a بیشتر از فشار آب u_w می باشد.

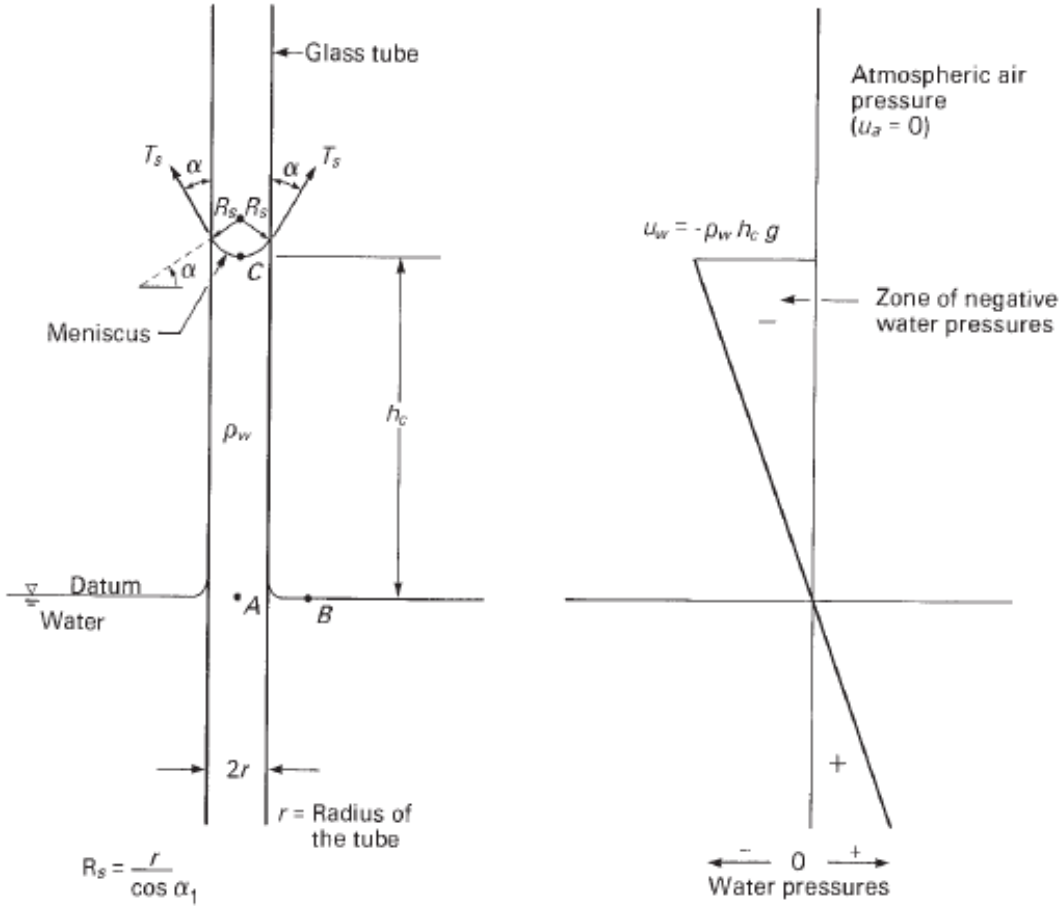
$$u_a - u_w = \frac{2T_s}{R_s}$$

- با افزایش نیروی مکش شعاع خمیدگی پوست انقباضی کاهش می یابد.
- با کاهش نیروی مکش به صفر (حالت اشباع) شعاع خمیدگی بی نهایت (سطح آب صاف) ولی نیروی کشش سطحی همچنان ثابت می ماند.

مویینگی

$$2\pi r T_s \cos\alpha_1 = \pi r^2 h_c \rho_w g$$

$$h_c = \frac{2T_s}{\rho_w g R_s}$$

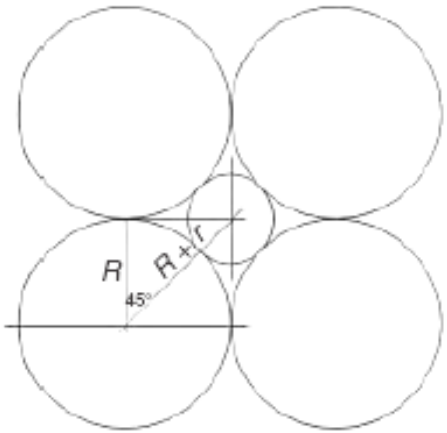


$$h_c = \frac{2T_s}{\rho_w g r}$$

زاویه در حالتی که آب خالص و شیشه تمیز باشد، صفر می باشد.

مویینگی در خاک

- جهت بررسی نیروی مکش در محیط متخلخل خاک می توان از مدلسازی ساده ذرات کروی شکل به جای دانه‌های خاک و بهره‌گیری از روابط هندسی استفاده نمود.



- وابستگی بین اندازه فضای متخلخل با دامنه‌های کروی شکل خاک

r شعاع فضای خالی

R شعاع دانه های کروی شکل خاکی

$$r = \frac{R}{Cos\,45} - R$$

موییینگی در خاک

- مقدار مکش در نقطه ورود هوا بر اساس رابطه موئینگی

$$u_a - u_w = \frac{2T_s}{\frac{R}{Cos\,45}} - R$$

- چنانچه کشش سطحی آب برابر با T_s =۰/۰۷۲۷۵ N/m در نظر گرفته شود؛ رابطه بین بزرگترین اندازه دانه خاک و نیروی مکش عبارت است از:

$$u_a - u_w = \frac{0.3513}{R}$$

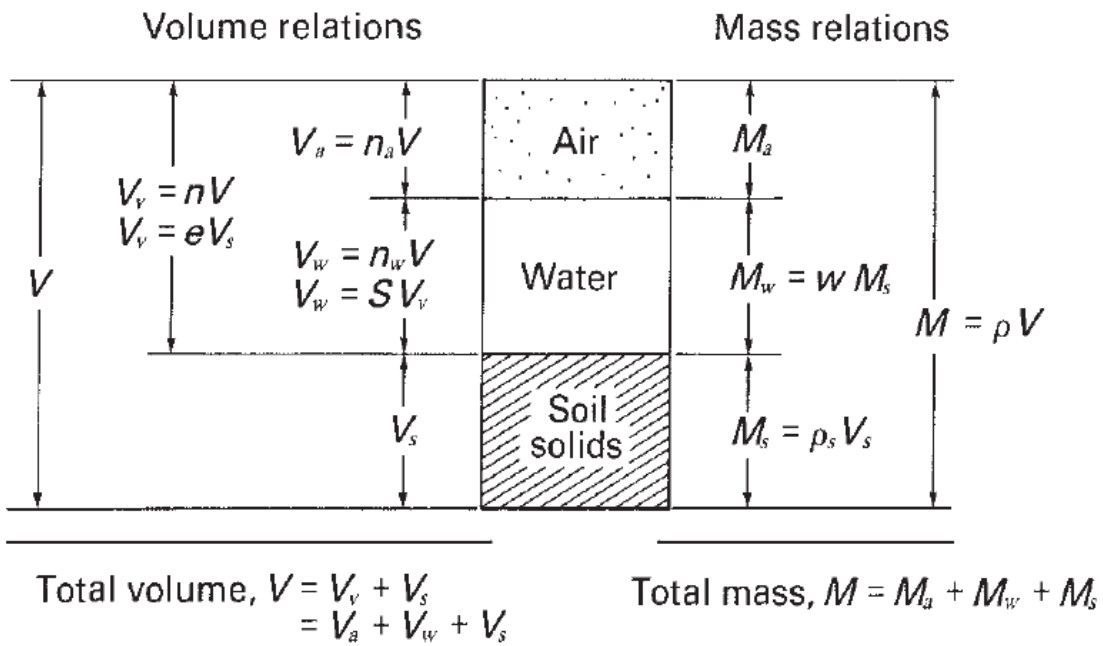
روابط وزنی-حجمی

- مطابق با شکل، پوکی توده خاک به دو بخش حجمی مربوط به آب و هوا جدا می شود.

$$n = \frac{V_v}{V} = n_w + n_a = \frac{V_w}{V} + \frac{V_a}{V}$$

n_w = water porosity, %, and
n_a = air porosity, %.

$$n_w = \theta = \frac{V_w}{V}$$



روابط وزنی-حجمی

- با توجه به رابطه زیر، تغییرات در هر فاز موجب تغییر در مقادیر یک یا دو پارامتر دیگر می شود.

$$S_i e_i = w_i G_s$$

$$S_f e_f = w_f G_s$$

$$S_f = S_i + \Delta S$$

$$e_f = e_i + \Delta e$$

$$w_f = w_i + \Delta w$$

$$\Delta S = \frac{\Delta w G_s - S_i \Delta e}{e_f}$$

$$\Delta e = \frac{\Delta w G_s - \Delta S e_i}{S_f}$$

$$\Delta w = \frac{S_f \Delta e - \Delta S e_i}{G_s}$$

ناپدید شدن جرم

- از مسائل خاص در مهندسی ژئوتکنیک زمانی است که طی رخداد یک یا چند پدیده، جرمی از سیستم ناپدید میگردد (خروج شیرابه از زباله).
- دومسئله می بایست مد نظر قرار گیرد:
  - قانون بقای ماده و انرژی پابرجاست.
  - مدل می بایست ناپدید شدن جرم در سیستم طی زمان را محاسبه کند.
  - مطابق با قانون بقای جرم در المان حجمی ارجاعی (REV)

$$M_t = M_s + M_w + M_a$$

M_s = mass of the solids in the REV,
M_w = mass of water,
M_a = mass of air, and
M_t = total mass of the overall REV.

ناپدید شدن جرم

- تغییرات آب درون خاک را می توان با حل معادله دیفرانسیل جزئی تراوش بررسی کرد.
- این رابطه تغییرات هد آب و در پی آن تغییر حجمی آب درون المان REV بررسی می کند.

$$\frac{\Delta V_w}{V_t} = m_w^1 \Delta(\sigma - u_a) + m_w^2 \Delta(u_a - u_w)$$

σ = total stress,
u_a = pore-air pressure,
u_w = pore-water pressure,
m_w^1 = coefficient of water volume change associated with the net normal stress state variable, and
m_w^2 = coefficient of water volume change associated with the matric suction.

- فرض می شود تغییر در تنش کل، چندان حجم آب در خاک را تغییر نمی دهد.

$$\frac{\Delta V_w}{V_t} = m_w^2 \Delta(u_a - u_w) = \Delta\theta$$

حالات تنش

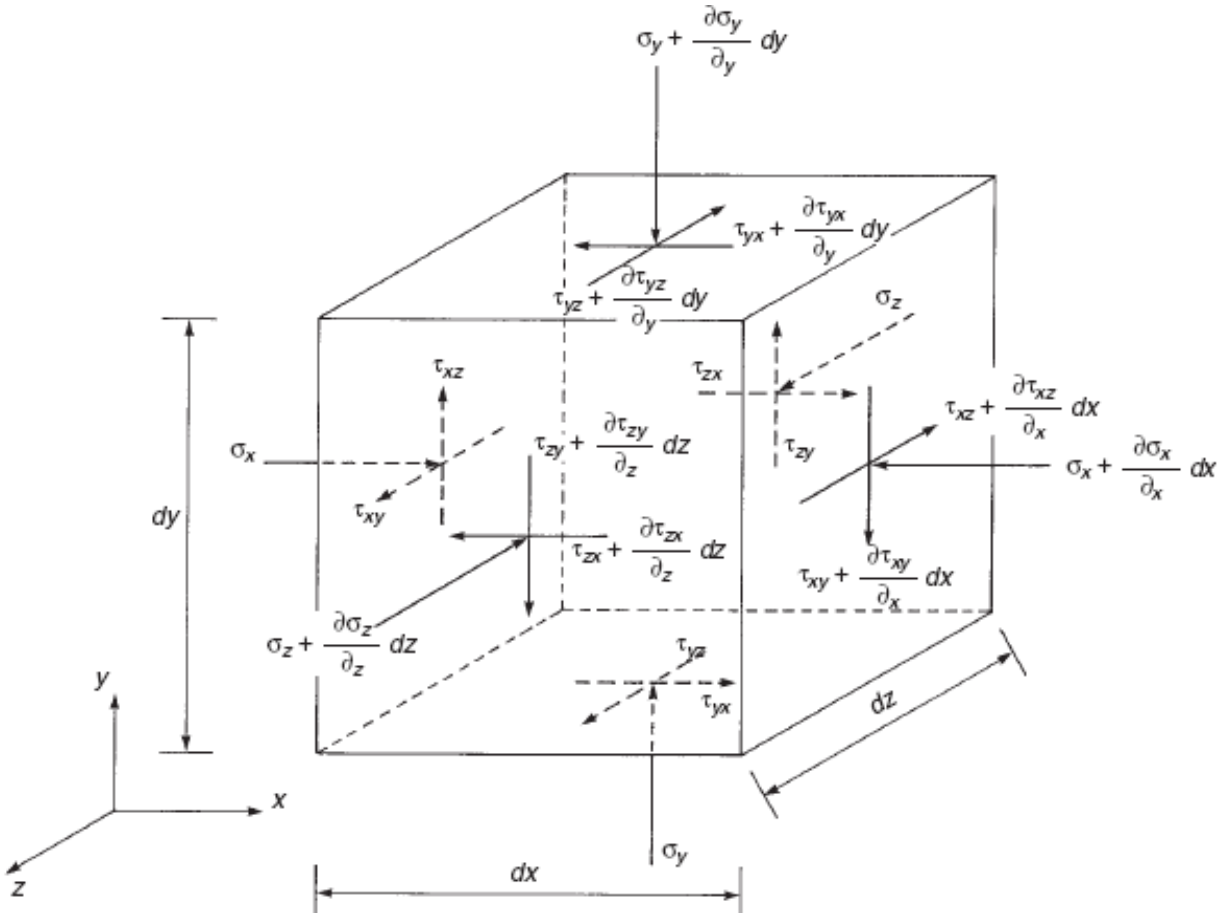
- رفتار مکانیکی خاک‌ها توسط متغیرهای تنش، که تعادل ساختار خاک را بررسی می نماید، مشخص می‌گردد.
- در خاک اشباع، تنش موثر یکی از حالات تنش می باشد.

$$\sigma' = \sigma - u_w$$

σ' = effective normal stress,
σ = total normal stress, and
u_w = pore-water pressure.

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - u_w & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - u_w & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - u_w \end{bmatrix}$$

حالات تعادل


$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial_y} dy$
$\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial_y} dy$
$\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial_y} dy$
σ_z
τ_{xz}
τ_{zx}
$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial_x} dx$
σ_x
$\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial_z} dz$
τ_{zy}
$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial_x} dx$
τ_{xy}
dy
$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial_z} dz$
$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial_x} dx$
$\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial_z} dz$
τ_{yz}
τ_{yx}
dz
y
x
z
σ_y
dx

حالات تعادل

- رابطه تعادل نیروهای سطحی و حجمی در جهت y

$$\left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho g\right)dx\,.dy\,.dz=\left(\rho\frac{Dv_y}{Dt}\right)$$

$$\frac{Dv_y}{Dt}=\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

τ_{xy} = shear stress on the x-plane in the y-direction,
σ_y = total normal stress on the y-plane,
τ_{zy} = shear stress on the z-plane in the y-direction,
ρ = total density of the soil,
g = gravitational acceleration,
dx, dy, dz = dimension of the element in the x-, y-, and z-directions, respectively,

v_y = velocity in the y-direction.

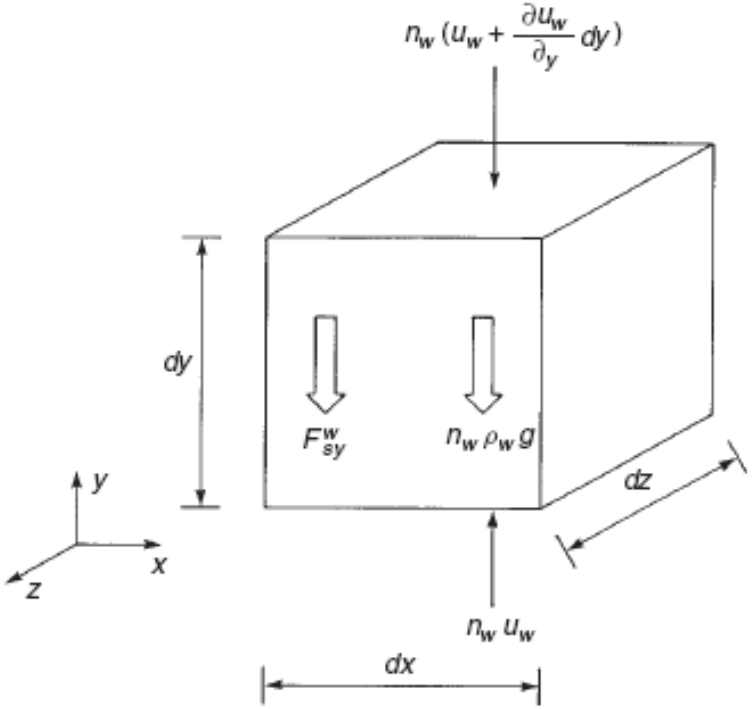
حالات تعادل

تعادل فاز آب

- به منظور جداسازی فاز آب ازمحیط غیراشباع دو اثر اندرکنشی آب با دانه‌های خاک(F_{sy}^{w}) به شکل یک نیروی حجمی و نیروی وزنی آب درنظر گرفته می شود.

$$\left(n_w \frac{\partial u_w}{\partial y} + n_w \rho_w g + F_{sy}^{w} \right) dx\, dy\, dz = 0$$

u_w = pore-water pressure,
ρ_w = density of water,
n_w = porosity with respect to the water phase, and
F_{sy}^{w} = interaction force (i.e., body force) between the water phase and the soil particles in the y-direction.



The interaction force between the water and the soil solids, F^{w}_{sy} , has the form of a “seepage force”.

حالات تعادل

رابطه تعادل اسکلت خاک

- با منها نمودن معادله تعادل کل از مجموع معادلات تعادل فازهای هوا، آب و پوست انقباضی، رابطه تعادل اسکلت خاک در جهت y(جهت جاذبه زمین) به دست می آید.

$$\{\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}-n_a\frac{\partial u_a}{\partial y}-n_w\frac{\partial u_w}{\partial y}+n_c f^*\frac{\partial(u_a-u_w)}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\rho g$$

$$-n_a\rho_a g-n_w\rho_w g-n_c\rho_c g-F_{sy}^w-F_{sy}^a+n_c(u_a-u_w)\frac{\partial f^*}{\partial y}\}dx.dy.dz=0$$

n_a = porosity with respect to the air phase,
n_c = porosity with respect to the contractile skin,
f^* = an interaction function between the contractile skin and the soil structure (Fredlund and Rahardjo, 1993a), and
F_{sy}^a = an interaction body force between the solids and the air phase in the y-direction.

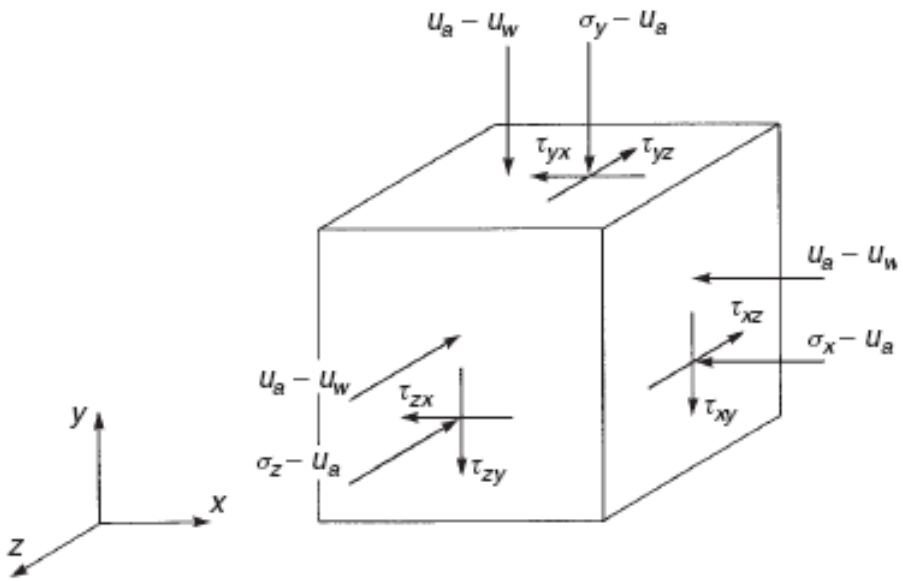
حالات تعادل

از رابطه تعادل می توان سه متغیر تنش عمودی به شکل‌های $(\sigma - u_a)$، $(u_a - u_w)$ و u_a مشخص نمود. چنانچه دانه‌های خاک فشردگی پذیر نباشند می‌توان از u_a صرفنظر نمود. بدین‌ترتیب متغیرهای تنشی برای ساختار خاک و پوست انقباضی $(\sigma - u_a)$ و $(u_a - u_w)$ می‌باشند.

- با توجه به المان تنش نشان داده شده می توان دو تانسور مستقل نوشت.

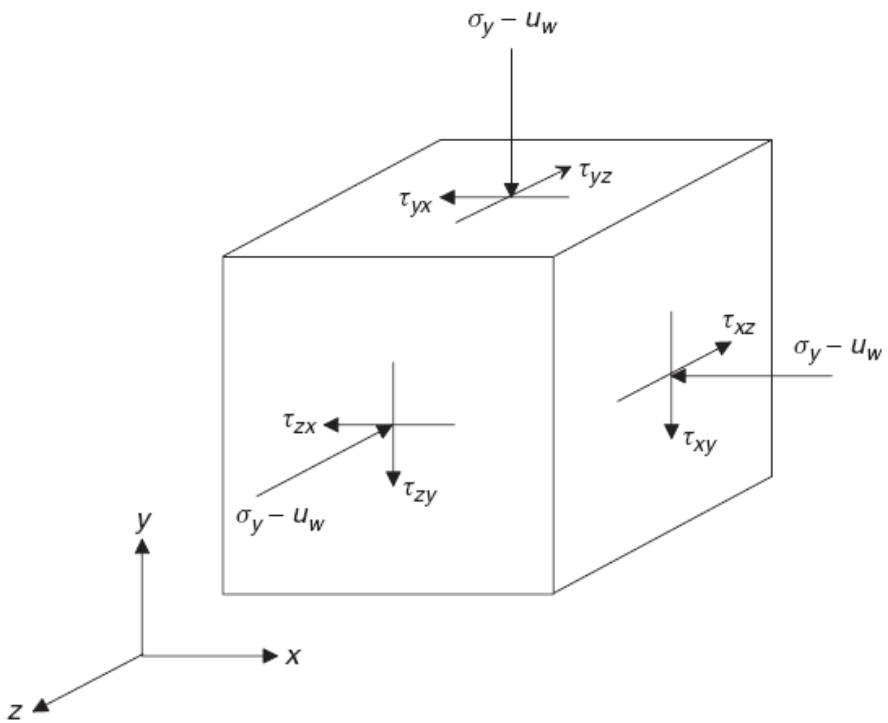
$$\begin{pmatrix} \sigma_x - u_a & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - u_a & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - u_a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_a - u_w & 0 & 0 \\ 0 & u_a - u_w & 0 \\ 0 & 0 & u_a - u_w \end{pmatrix}$$



حالات تعادل

- برای آن که خاک رفتار اشباع را از خود نشان دهد نیاز نیست فشار هوا برابر صفر شود. بلکه فشار آب باید چنان افزایش یابد تا برابر با فشار هوا گردد.
- به عبارت دیگر نشانه اشباع شدن خاک، تقریب ماتریس مکش به مقدار صفر است.
- زمانی که فشار آب چنان افزایش یابد تا با فشار هوا یکسان گردد. در این حالت، شرایط اشباع فراهم شده و تنها یک متغیر تنشی باقی می‌ماند.



نظریه الاستیسیته

- در خاک‌های اشباع، ضریب فشار جانبی خاک در حالت سکون بین ۰/۴ تا یک است. درحالی که در خاک‌های غیراشباع که معمولا پیش‌تحکیم‌یافته هم هستند، این مقدار به بیش از یک می‌رسد و در خاک‌های کاملا خشک شده و ترک خورده برابر صفر است.

- با استفاده از تئوری الاستیسیته ارتباط بین تنش عمودی و کرنش عمودی برای خاک همگن، همسان و غیراشباع مطابق با رابطه زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_v - u_a}{E} - \frac{2\mu}{E}(\sigma_h - u_a) + \frac{u_a - u_w}{H}$$

نظریه الاستیسیته

- این رابطه برای کرنش افقی به صورت رابطه زیر می باشد.

$$\varepsilon_h = \frac{\sigma_h - u_a}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_v + \sigma_h - 2u_a) + \frac{u_a - u_w}{H}$$

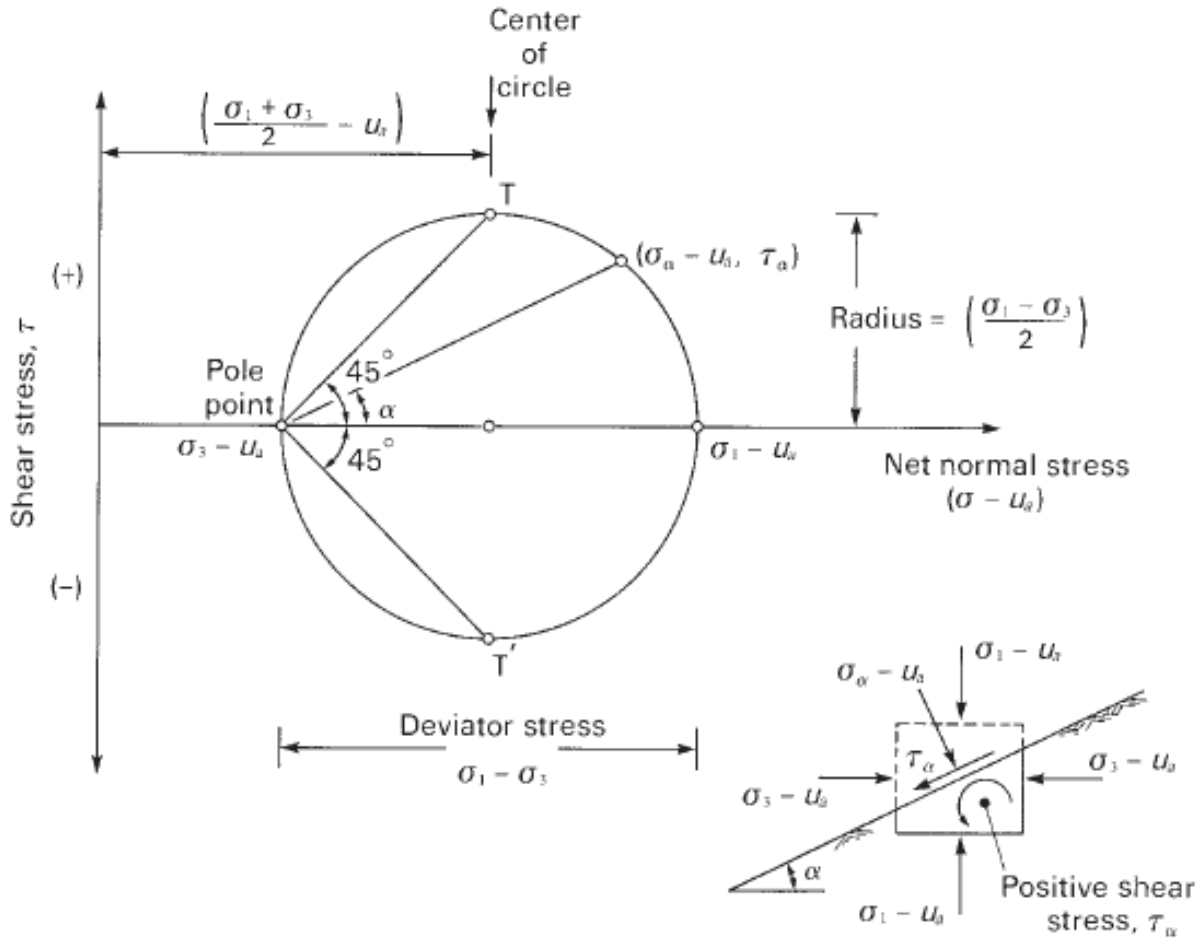
- در حالت سکون با توجه به اینکه کرنش افقی صفر در نظر گرفته می‌شود مقدار ضریب توزیع تنش افقی به صورت رابطه زیرمی‌باشد.

$$K_o = \frac{\mu}{1-\mu} - \frac{E}{(1-\mu)H}\frac{u_a - u_w}{\sigma_v - u_a}$$

ε_v = normal strain in the vertical direction,
σ_v = total normal stress in the vertical direction,
σ_h = total normal stress in the horizontal direction,
μ = Poisson's ratio,
E = elastic modulus with respect to a change in $\sigma - u_a$,
H = elastic modulus with respect to a change in $u_a - u_w$,
u_a = pore-air pressure, and
u_w = pore-water pressure.

دایره مور-خاک غیر اشباع

$$\left[(\sigma_\alpha - u_a) - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - u_a\right)\right]^2 + \tau_\alpha^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$



مکش

- مهندس ژئوتکنیک باید فهم مناسبی از فیزیک مربوط به مکش خاک و بازه مقادیر مکش، بسته به نوع و وسیله اندازه‌گیری مکش داشته باشد.
- به طور کلی نیروی مکش (ψ) به دو قسمت مجزای مکش متریک و مکش اسمزی قابل بیان است.

$$\psi = (u_a - u_w) + \pi$$

- مکش متریک با اعمال تغییرات محیطی همچون بارش باران و تغییر رطوبت خاک قابل تغییر می‌باشد.
- مکش اسمزی به دلیل تغییر در میزان یون‌های نمک موجود در آب درون خاک قابل تغییر بوده و در چنین شرایطی اهمیت دارد.

مکش

- مکش اسمزی را می‌توان بر اساس اصول ترمودینامیک بر اساس معادله Van't Hoff به شکل رابطه زیر تعیین نمود.

$$\pi = RT_K C$$

π = osmotic pressure, kPa,
C = sum of the molar concentrations in solution, mol/L,
R = universal gas constant = 8.314 J/(mol·K), and
T_K = absolute temperature, K.

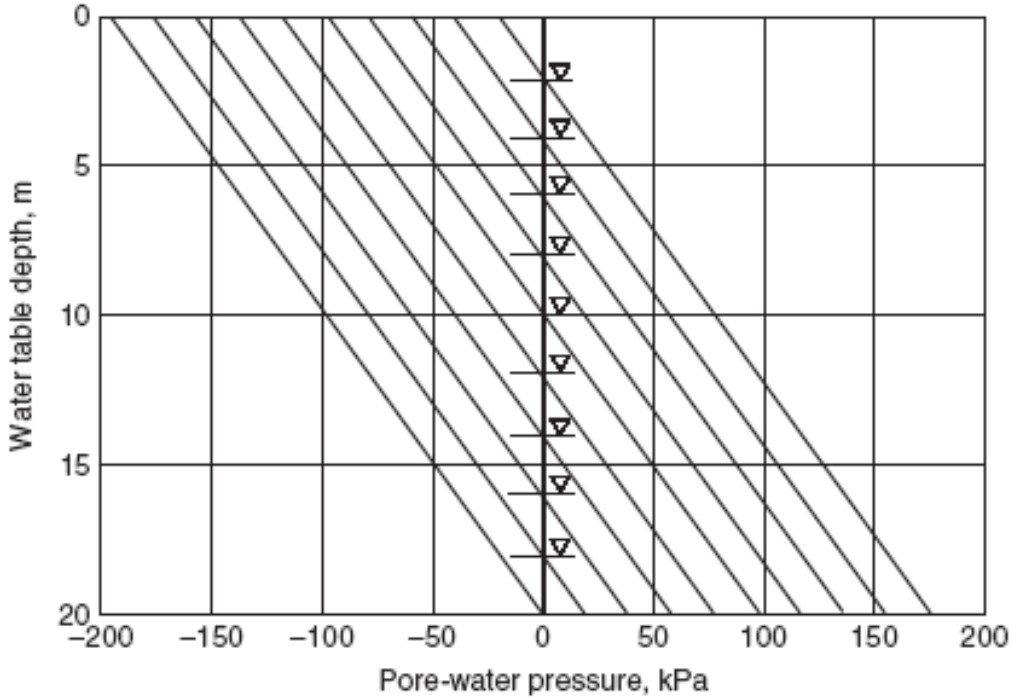
- در بیشتر موارد موجود در مهندسی ژئو تکنیک، مسئله تغییر در رطوبت خاک بسیار شایع‌تر از تغییر در میزان نمک موجود در آب بوده و بدین دلیل مکش اسمزی چندان چشمگیر نیست.

مکش

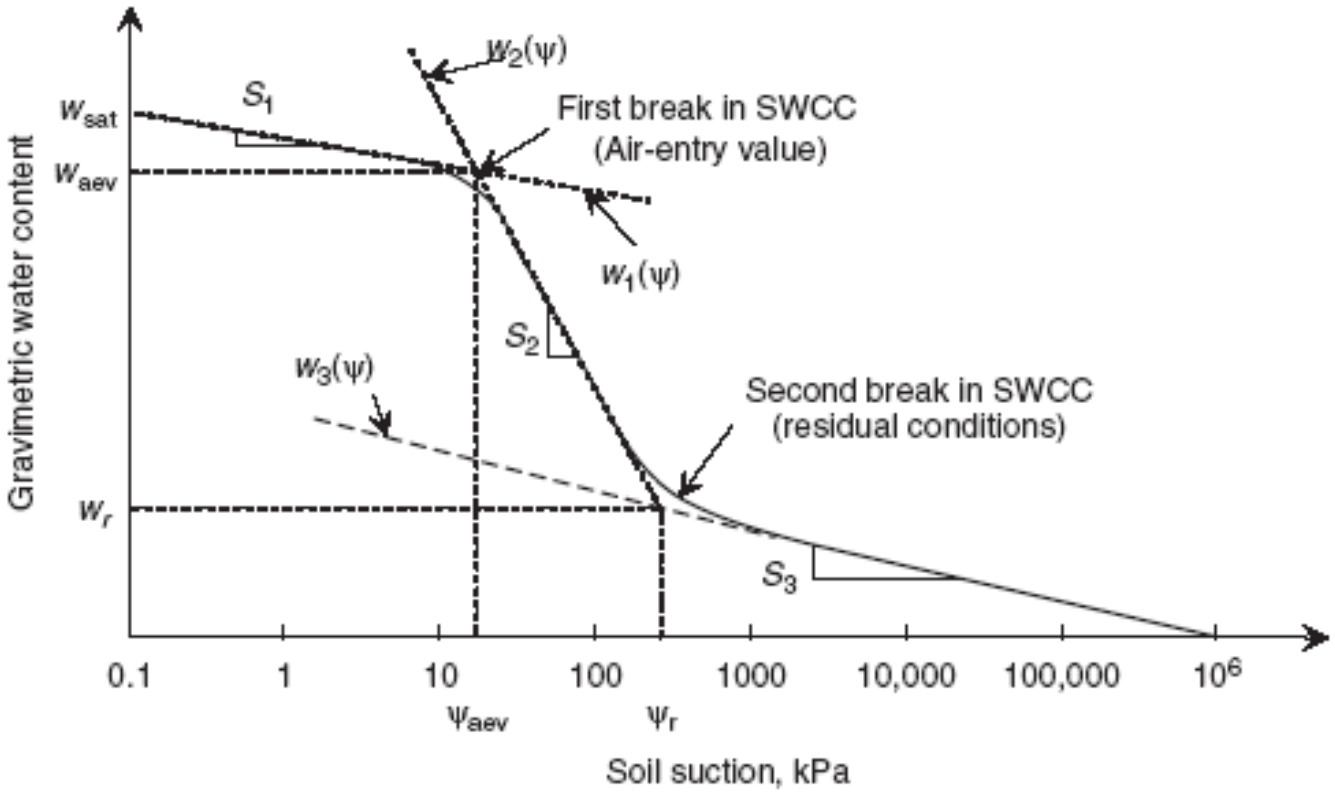
Name of Device	Suction Component Measured	Range, kPa	Comments
Psychrometers (Peltier type)	Total	100[a] to ~8000	Constant-temperature environment required
Filter paper	Total	Entire range	May measure matric suction when in good contact with moist soil
Tensiometers	Negative pore-water pressures or matric suction when pore-air pressure is atmospheric	0–90	Difficulties with cavitation and air diffusion through ceramic cup
Null-type pressure plate (axis translation)	Matric	0–1500	Range of measurement is a function of the air-entry value of ceramic disk
Thermal conductivity sensors	Matric	10 to ~1500	Indirect measurement using variable-pore-size ceramic sensor
Pore fluid squeezer	Osmotic	Entire range	Used in conjunction with psychrometer or electrical conductivity measurement

مکش

- خواص طبقه‌بندی خاک‌ها اولین و بهترین نشانه را برای تعیین منحنی SWCC فراهم می‌نماید. ا
- از طرفی شکل منحنی SWCC نشانه مناسبی از محدوده مکش متریک را به همراه دارد.
- سطح آب زیرزمینی و عمق آن از سطح خاک نقش مؤثری در میزان مکش متریک در خاک داشته و می‌تواند مقدار مکش متریک را بر اساس اعماق متفاوت سطح آب زیرزمینی، مطابق با شکل تخمین زد.



مکش



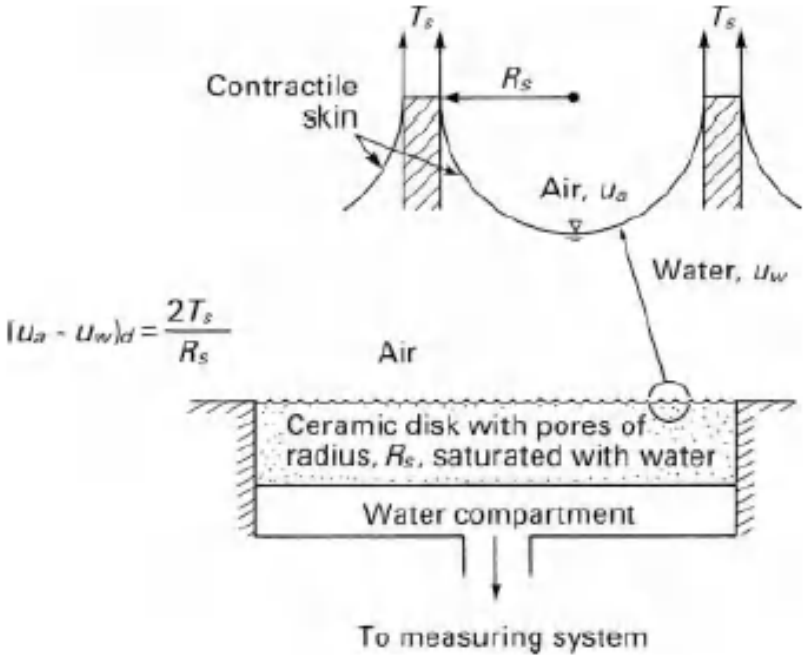
سه منطقه اولیه برای خاک در شرایط کاهش درجه اشباع با روش خشک شدن

مکش

- توجه گردد تغییرات مکش در منحنی‌های خشک و تر به گونه‌ای است که هر دو نمودار با هم موازی بوده و برای یک رطوبت مشخص، مکش در حالت خشک، بیشتر از آن در حالت تر می‌باشد.
- جدول زیر نشان‌دهنده اختلاف بین دو منحنی خشک و تر، برای سه نوع خاک را مشخص می‌نماید.

نوع خاک	درصد تغییرات دو منحنی	متوسط درصد تغییرات
ماسه یکنواخت	۱۵–۳۵	۲۵
سیلت و خاک نباتی	۳۵–۶۰	۵۰
رس	----	۵۰–۱۰۰

مکش



$$(u_a - u_w)_d = \frac{2T_s}{R_s}$$

$(u_a - u_w)_d$ = air-entry value of the high-air-entry disk, kPa,

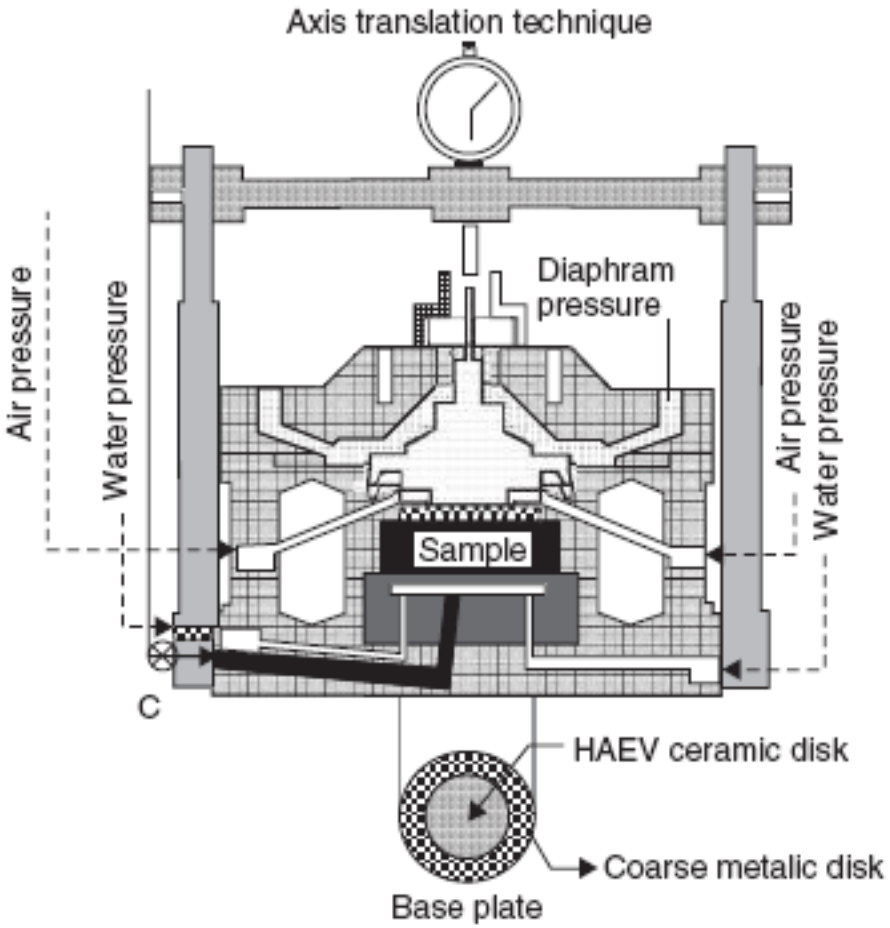
T_s = surface tension of the contractile skin or the air-water interface (e.g., $T_s = 73.75$ mN/m at 20 °C), and

R_s = radius of curvature of the contractile skin or the radius of the maximum pore size, m.

مکش

اندازه‌گیری SWCC با استفاده از ابزار صفحه فشار

- مطابق با شکل با استفاده از دستگاه فشار می‌توان هوا را با فشار مورد نظر به نمونه خاک وارد نموده و از طرف دیگر فشار آب خروجی را اندازه‌گیری کرد و اختلاف این دو مقدار را به عنوان مکش متریک درنظر گرفت.



جریان آب در خاک غیر اشباع

- نرخ جریان آب درون یک محیط متخلخل به شکل مستقیم وابسته به ضریب نفوذپذیری آن محیط می باشد.
- هر چند در خاکهای اشباع ضریب نفوذپذیری چندان تغییر نمی یابد؛ اما این ضریب در خاک غیر اشباع با تغییرات درجه اشباع و با تغییر نیروی مکش تغییر می نماید.
- با کاهش درجه اشباع، به دلیل کاهش سطح مقطع فضای آب، ضریب نفوذپذیری نیز کاهش می یابد. در این حالت انحنا مسیر آب (Tortuosity) بیشتر می شود.

جریان آب در خاک غیر اشباع

- بدین ترتیب تغییر در درصد رطوبت، نیروی مکش و یا پتانسیل هیدرولیکی می تواند موجب تغییر در نرخ جریان آب در محیط متخلخل گردد.
- توجه شود که تغییرات درصد رطوبت و مکش نباید پایه اصلی پتانسیل حرکت آب گردد.
- در صورت صفر بودن تغییرات فشار هوا، به دلیل ارتباط مستقیم نیروی مکش به تغییرات فشار آب، می توان تغییرات مکش را برای بررسی جریان آب در نظر گرفت.
- بهترین پارامتر برای توصیف جریان آب، تغییرات هد هیدرولیکی است.

$$h_w = y + \frac{u_w}{\rho_w g} + \frac{v_w^2}{2g}$$

$$h_w = y + \frac{u_w}{\rho_w g}$$

جریان آب در خاک غیر اشباع

- ضریب نفوذپذیری وابسته به نوع خاک و نوع سیال مورد نظر می باشد.
- برای آب می توان رابطه نفوذپذیری را به شکل زیر نوشت

$$k_w = \frac{\rho_w g}{\nu} K = \frac{\gamma}{\nu} K$$

K = intrinsic permeability of the soil, m^2,
g = gravitational acceleration, m/s^2,
ν = dynamic viscosity, cP,
ρ = density, kg/m^3, and
γ = unit weight of the medium, N/m^3.

- در خاک غیر اشباع، ضریب نفوذپذیری را می توان به تخلخل و درجه اشباع وابسته دانست.

$$k_w = k_w(S, e)$$

S = degree of saturation,
e = void ratio, and
w = gravimetric water content.

$$k_w = k_w(e, w)$$

$$k_w = k_w(w, S)$$

جریان آب در خاک غیر اشباع

- می توان درجه موثر اشباع را به شکل زیر تعریف نمود

$$S_e = \frac{S - S_r}{1 - S_r}$$

S_e = effective degree of saturation,
S_r = residual degree of saturation (decimal form), and
S = any degree of saturation (decimal form).

- مقدار درجه موثر اشباع برای نیروی مکش بیشتر از حد ورود هوا به شکل زیر محاسبه می شود.

$$S_e = \left\{ \frac{(u_a - u_w)_b}{(u_a - u_w)} \right\}^{\lambda} \quad \text{for} \quad (u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b$$

λ = pore-size distribution index defined as the negative slope of the effective degree of saturation S_e versus matric suction $(u_a - u_w)$.

جریان آب در خاک غیر اشباع

- ضریب نفوذپذیری آب در خاک غیر اشباع را می توان با رابطه زیر تقریب زد.

$$k_w = k_s \quad \text{for} \quad u_a - u_w \le (u_a - u_w)_b$$

$$k_w = k_s S_e^{\delta} \quad \text{for} \quad u_a - u_w > (u_a - u_w)_b$$

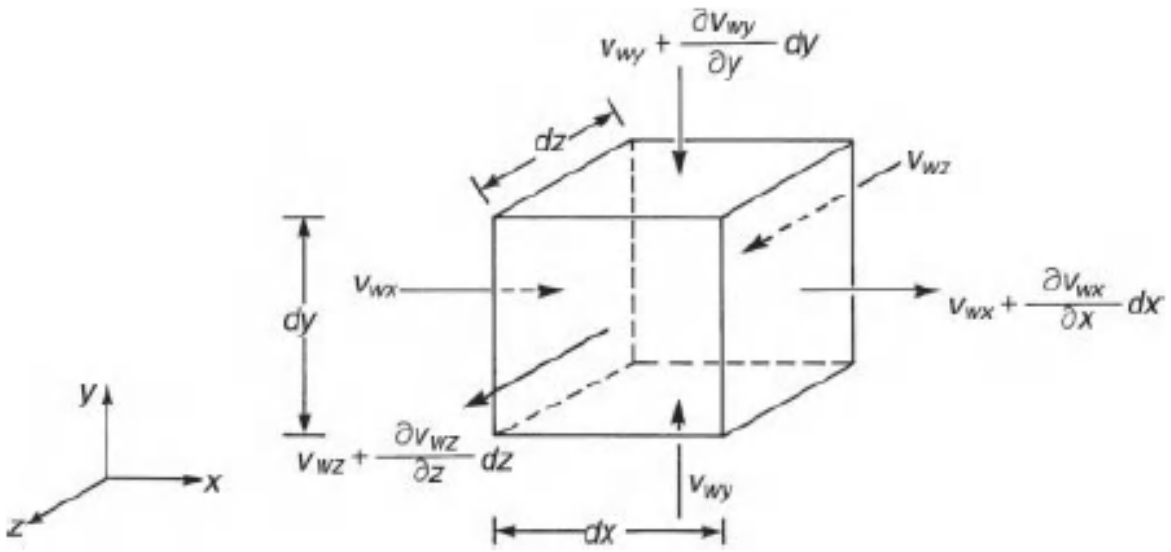
$$\delta = \frac{2 + 3\lambda}{\lambda}$$

k_s = coefficient of permeability with respect to the water phase for the saturated soil (i.e., $S = 100\%$) and

δ = an empirical constant for the permeability function.

جریان آب در خاک غیر اشباع

حال جریان در جزء سه بعدی برای یک خاک غیر اشباع با شرایط همگن و غیر همسان مطابق با شکل بررسی می گردد.



$$(V_{wx} \frac{\partial v_{wx}}{\partial x} dx - v_{wx}) dy.dz + (V_{wy} \frac{\partial v_{wy}}{\partial y} dy - v_{wy}) dx.dz + (V_{wz} \frac{\partial v_{wz}}{\partial z} dy - v_{wz}) dx.dy = 0$$

$$(\frac{\partial v_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{wz}}{\partial z}) dx.dy.dz = 0$$

جریان آب در خاک غیر اشباع

با توجه به قانون دارسی:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{k_{wx}(u_a-u_w)\frac{\partial h_w}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{k_{wy}(u_a-u_w)\frac{\partial h_w}{\partial y}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{k_{wz}(u_a-u_w)\frac{\partial h_w}{\partial z}\right\}=0$$

- ✓ رابطه جریان در خاک غیر اشباع برای حالت غیرهمگن- غیرهمسان:

$$k_{wx}\frac{\partial^2 h_w}{\partial x^2}+k_{wy}\frac{\partial^2 h_w}{\partial y^2}+k_{wz}\frac{\partial^2 h_w}{\partial z^2}+\frac{\partial k_{wx}}{\partial x}.\frac{\partial h_w}{\partial x}+\frac{\partial k_{wy}}{\partial y}.\frac{\partial h_w}{\partial y}+\frac{\partial k_{wz}}{\partial z}.\frac{\partial h_w}{\partial z}=0$$

- ✓ رابطه جریان در خاک غیر اشباع برای حالت همگن- غیرهمسان:

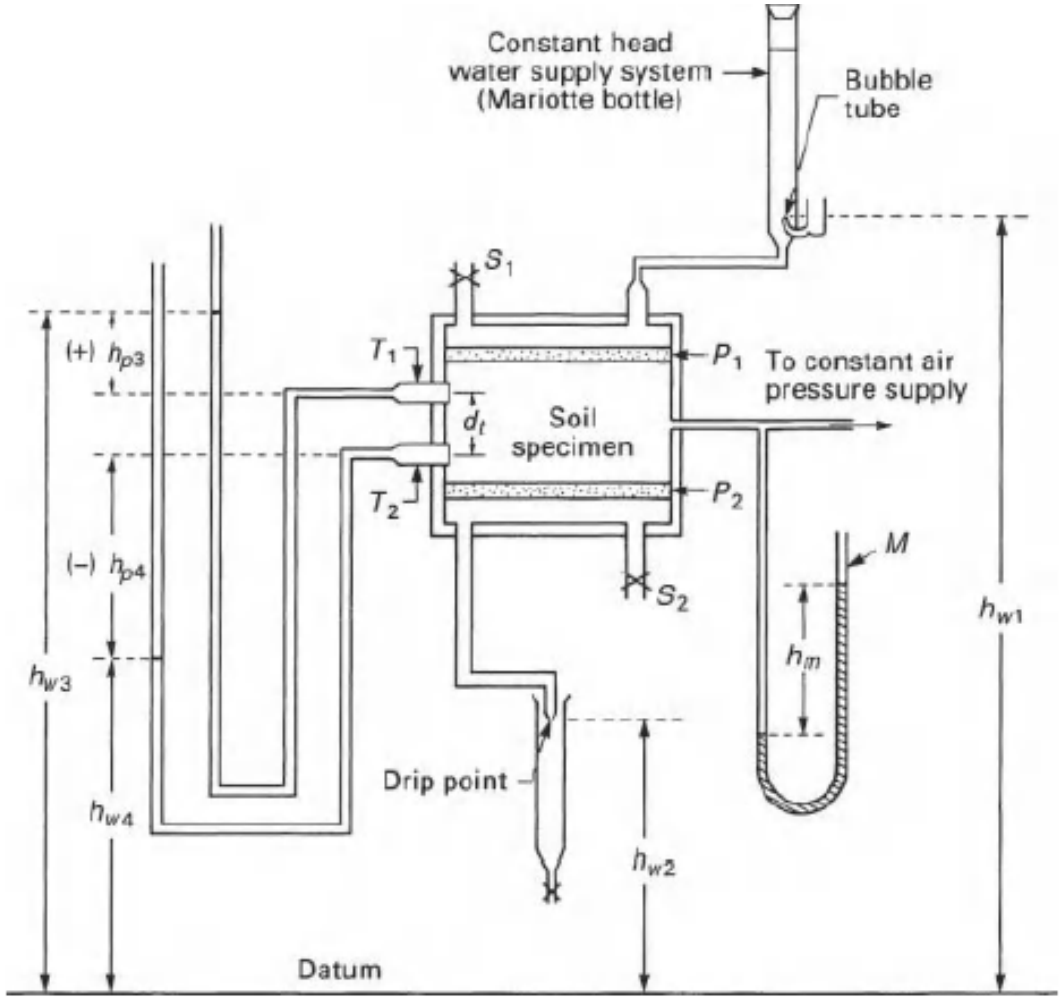
$$k_w\left(\frac{\partial^2 h_w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 h_w}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial k_w}{\partial x}.\frac{\partial h_w}{\partial x}+\frac{\partial k_w}{\partial y}.\frac{\partial h_w}{\partial y}+\frac{\partial k_w}{\partial z}.\frac{\partial h_w}{\partial z}=0$$

جریان آب در خاک غیر اشباع

اندازه گیری پارامترهای جریان آب در خاک غیر اشباع

- به منظور اندازه‌گیری ضریب نفوذپذیری جریان در خاک غیراشباع با فرض معتبر بودن قانون دارسی، دو متغییرگرادیان هیدرولیکی و دبی جریان به روش آزمایشگاهی اندازه‌گیری می‌شود.
- آزمایش به دو روش حالت جریان دائمی و غیردائمی قابل انجام است.
- در آزمایش با جریان دائمی: با ایجاد یک هد هیدرولیکی ثابت، مکش متریک ثابت و درصد رطوبت ثابت برای خاک، ضریب نفوذپذیری (k_w) برای مکش متریک مورد نظر محاسبه می‌شود.
- این روش برای هر دو نوع خاک بازسازی شده و دست‌نخورده قابل انجام می‌باشد.

جریان آب در خاک غیر اشباع



جریان آب در خاک غیر اشباع

- حالت دائمی زمانی است که دبی ورودی و خروجی آب از نمونه یکسان باشد و کشش‌سنج‌ها مقادیر ثابتی را در زمان اندازه‌گیری نمایند.
- دبی جریان در سطح مقطع نمونه خاک (A) اندازه‌گیری می‌گردد.
- مقادیر هد هیدرولیکی hw_3 و hw_4 در کشش‌سنج‌های T_1 و T_2 که به فاصله d_t از هم قرار دارند ثبت می‌شوند و گرادیان هیدرولیکی اندازه‌گیری می‌گردد.
- بدین ترتیب ضریب نفوذپذیری مطابق با رابطه زیر تعیین می شود.

$$k_w = \left(\frac{Q}{At}\right)\left(\frac{d_t}{h_{w3} - h_{w4}}\right)$$

جریان آب در خاک غیر اشباع

- فشار حفره‌ای هوا از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$u_a = \rho_m . g . h_m$$

ρ_m = density of the manometer fluid,
g = gravitational acceleration, and
h_m = height of the manometer fluid.

- فشار متوسط آب حفره‌ای را می توان با رابطه زیر محاسبه نمود.

$$(u_w)_{ave} = \left(\frac{h_{p3} + h_{p4}}{2}\right)\rho_w . g$$

ρ_w = density of water and
$(u_w)_{ave}$ = average of pore-water pressure.

- مکش متریک متوسط از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

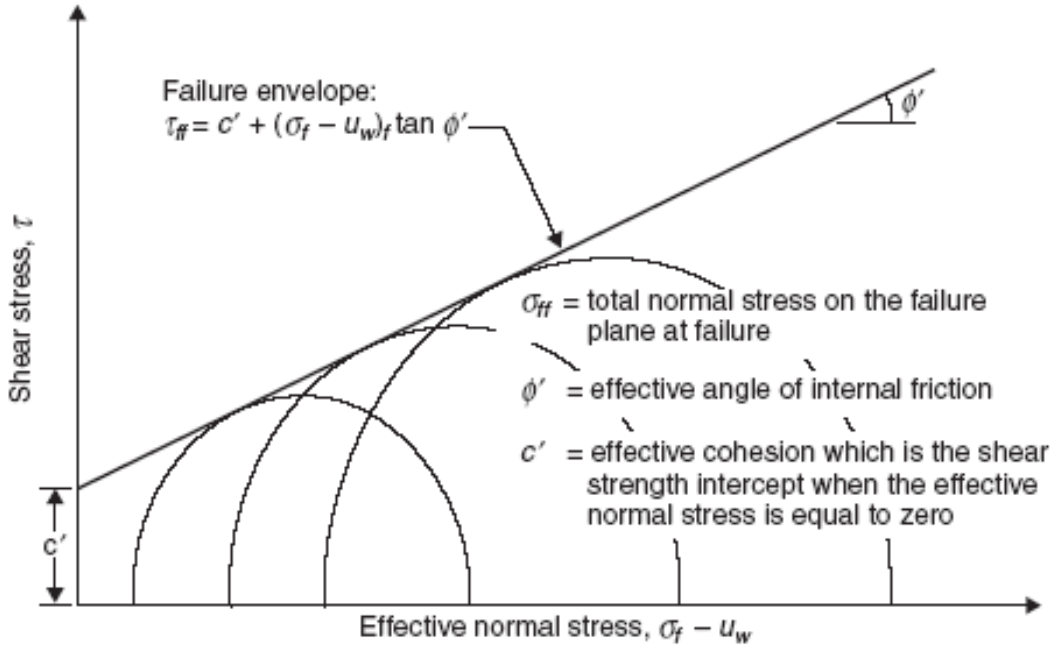
$$(u_a - u_w)_{ave} = \rho_w . g \ . h_m \ -\left(\frac{h_{p3} + h_{p4}}{2}\right)\rho_w . g$$

مقاومت برشی

- در خاک اشباع مقاومت برشی با رابطه زیر تعریف می شود

$$\tau_{ff} = c' + (\sigma_f - u_w)_f \tan \phi'$$

τ_{ff} = shear stress on the failure plane at failure,
c' = effective cohesion, which is the shear strength intercept when effective normal stress is equal to zero,
$(\sigma_f - u_w)_f$ = effective normal stress on the failure plane at failure,
σ_{ff} = total normal stress on the failure plane at failure,
u_{wf} = pore-water pressure at failure, and
ϕ' = effective angle of internal friction.



مقاومت برشی

- در حالت بحرانی، رابطه رفتاری خاک غیر اشباع به شکل زیر می باشد:

$$q = M[(p - u_a) + S(u_a - u_w)]$$ Joomi (2000)

$q = \sigma_1 - \sigma_3$; deviator stress

$p = \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$; mean total stress

$r = u_a - u_w$; matric suction

$$\tau_{ff} = c' + (\sigma_f - u_a)_f \tan \phi' + (u_a - u_w)_f \tan \phi^b$$

c' = intercept of the "extended" Mohr-Coulomb failure envelope on the shear stress axis where the net normal stress and the matric suction at failure are equal to zero, also referred to as "effective cohesion,

$(\sigma_f - u_a)_f$ = net normal stress state on the failure plane at failure,

u_{af} = pore-air pressure on the failure plane at failure,

ϕ' = angle of internal friction associated with the net normal stress state variable, $(\sigma_f - u_a)_f$,

$(u_a - u_w)_f$ = matric suction on the failure plane at failure, and

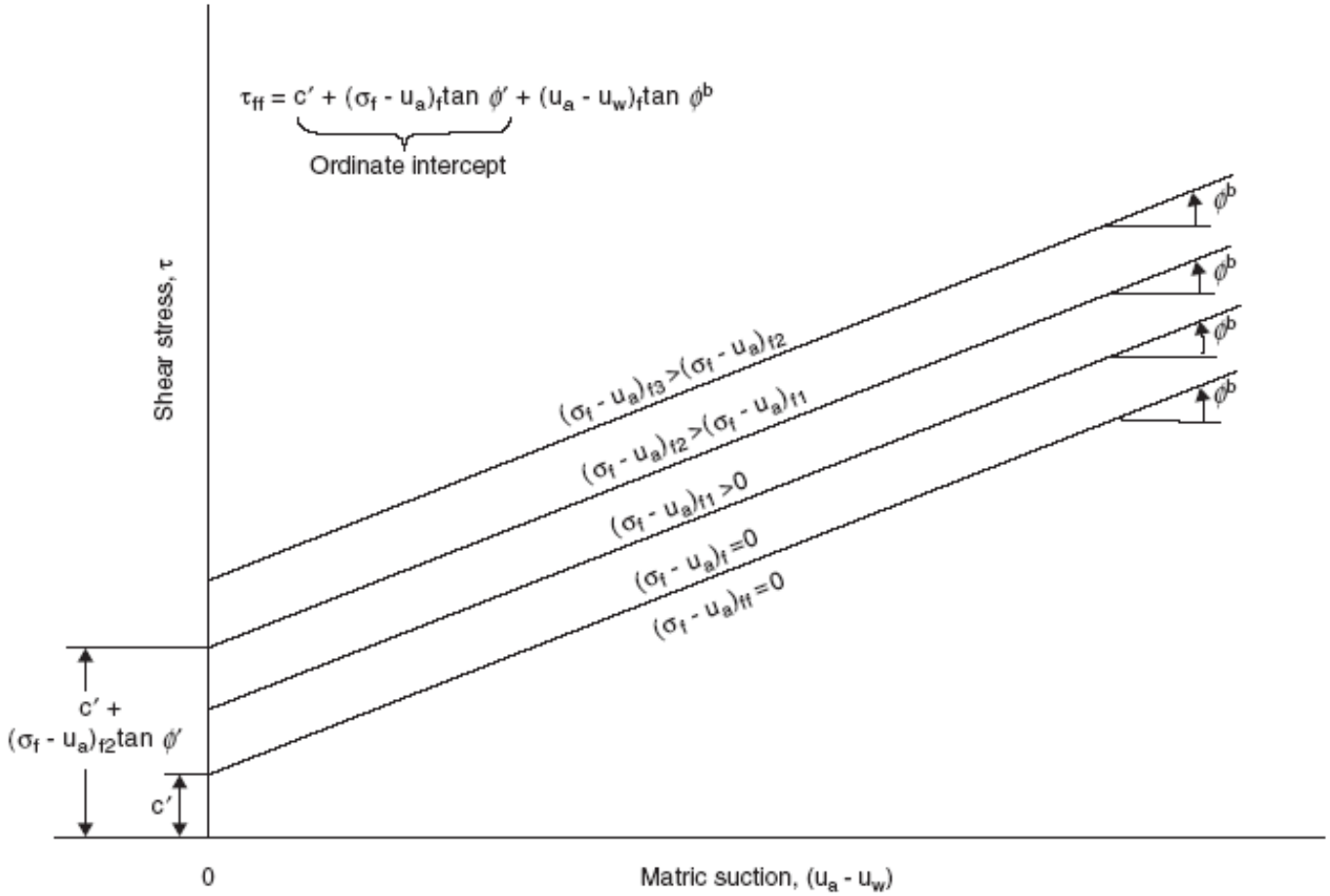
ϕ^b = angle indicating the rate of increase in shear strength with respect to a change in matric suction, $(u_a - u_w)_f$.

مقاومت برشی

- بدین ترتیب پارامترهای مقاومت برشی در خاک غیر اشباع چسبندگی، زاویه اصطکاک داخلی و چسبندگی ظاهری ناشی از مکش می باشد.
- پارامترهای تاثیرگذار همچون دانسیته خاک، نسبت تخلخل، درجه اشباع، نوع کانی، تاریخچه تنش و نرخ کرنش می باشند.
- مطابق با مطالعات انجام شده، $\phi_b \leq \phi'$ می باشد.

مقاومت برشی

- افزایش تنش عمودی خالص در مقدار مکش ثابت، موجب افزایش مقاومت برشی می گردد.



آزمایش سه محوری

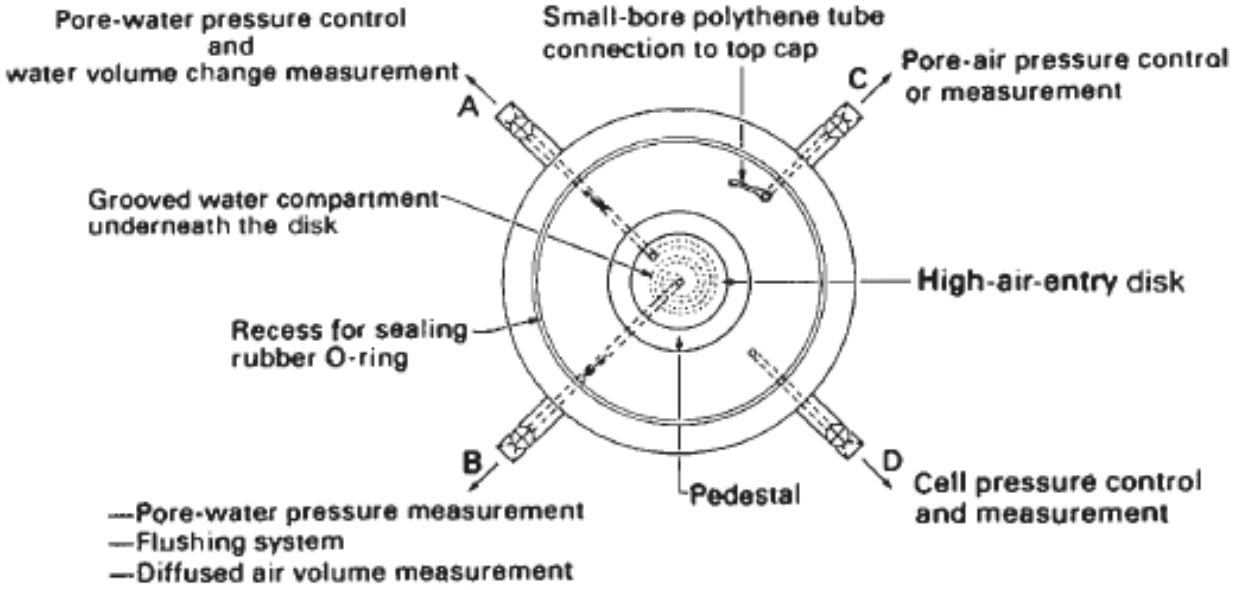
- انتخاب صفحه سرامیکی مناسب

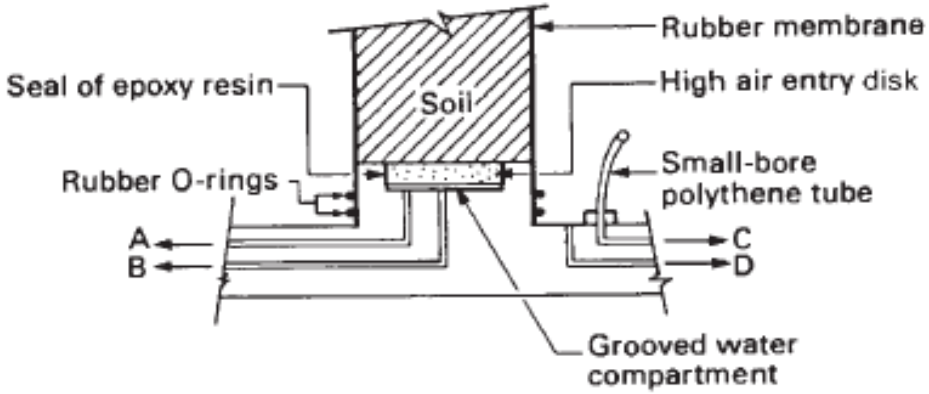
$$(u_a - u_w)_d = \frac{2T_s}{R_s}$$

$(u_a - u_w)_d$ = air-entry value of the high-air-entry disk,
T_s = surface tension of the contractile skin or the air-water interface (e.g., $T_s = 72.75$ mN/m at 20°C), and
R_s = radius of curvature of the contractile skin or the pore radius.

Type	Approximate Pore Diameter ($\times 10^{-3}$ mm)	Coefficient of Permeability, k_d (m/s)	Range of Air-Entry Values, $(u_a - u_w)_d$ (kPa)
½ bar (high flow)	6.0	3.11×10^{-7}	48–62
1 bar	2.1	3.46×10^{-9}	138–207
1 bar (high flow)	2.5	8.6×10^{-8}	131–193
2 bars	1.2	1.73×10^{-9}	241–310
3 bars	0.8	1.73×10^{-9}	317–483
5 bars	0.5	1.21×10^{-9}	>550
15 bars	0.16	2.59×10^{-11}	>1520

آزمایش سه محوری



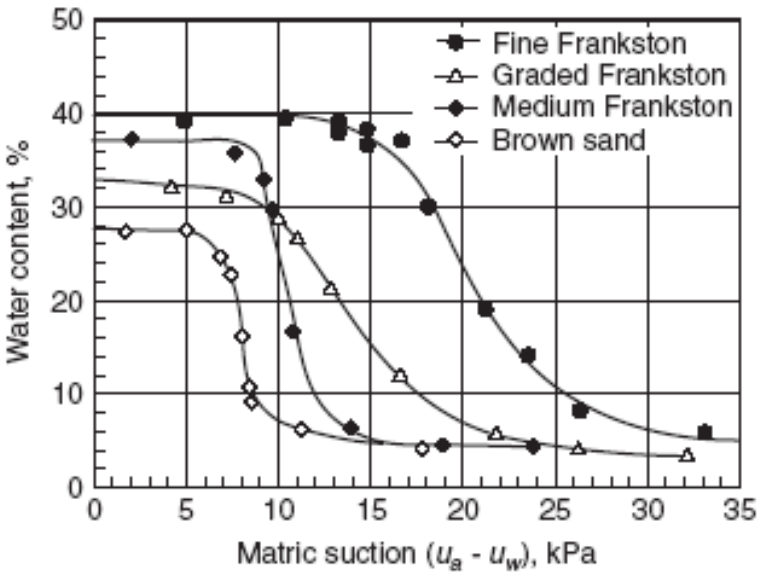


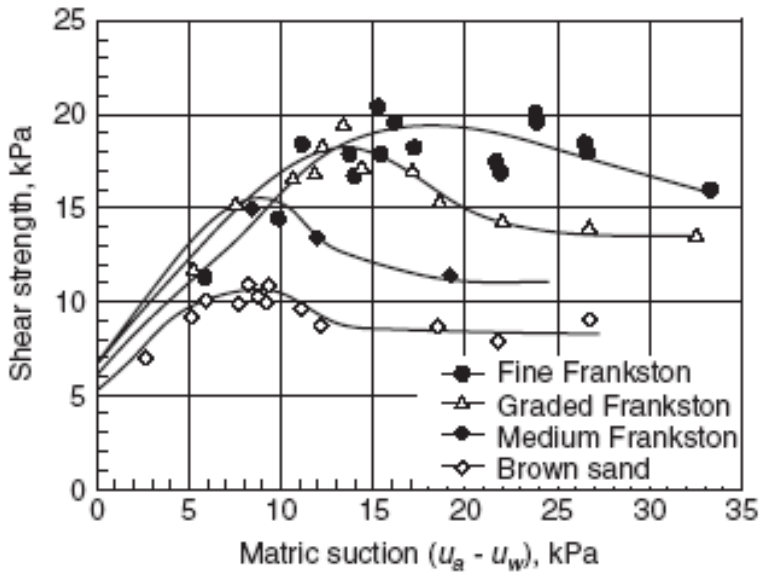
تخمین مقاومت برشی

- با توجه به طبیعت پیچیده خاک های غیر اشباع، تعیین پارامترهای مقاومت برشی از آزمایشگاه همراه با وقت و هزینه زیاد است. لذا تخمین مقاومت برشی همواره مورد علاقه بوده است.
- مطالعات نشان می دهد که:
  - مکش بیشتر منجر به مقاومت برشی بیشتر تحت تنش محصورکننده ثابت می گردد.
  - تنش محصورکننده بیشتر منجر به مقاومت برشی بیشتر تحت مکش ثابت مب گردد.
  - رابطه بین مکش و تنش برشی غیر خطی بوده؛ به گونه ای که شیب تغییرات در مکش های کم، زیاد بوده و شیب در مکش های زیاد، کم شده و حتی منفی می گردد.

تخمین مقاومت برشی

- بدین ترتیب می توان مقاومت برشی خاک غیر اشباع را با نمودار SWCC مرتبط نمود.
- به طور معمول مطالعات نشان می دهد که بیشینه مقاومت برشی و سپس کاهش آن در محدوده انتقالی اتفاق می افتد.

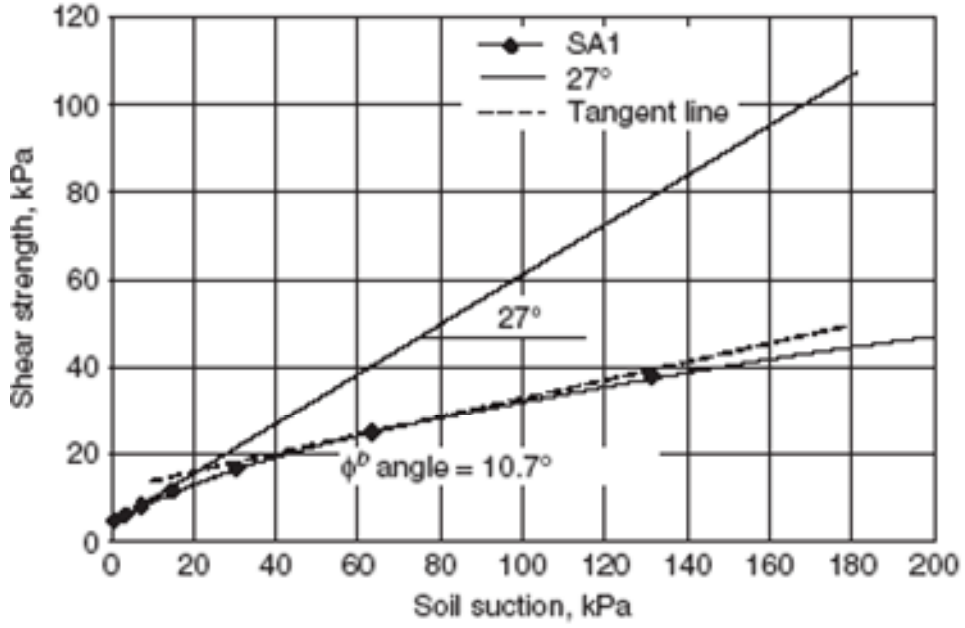


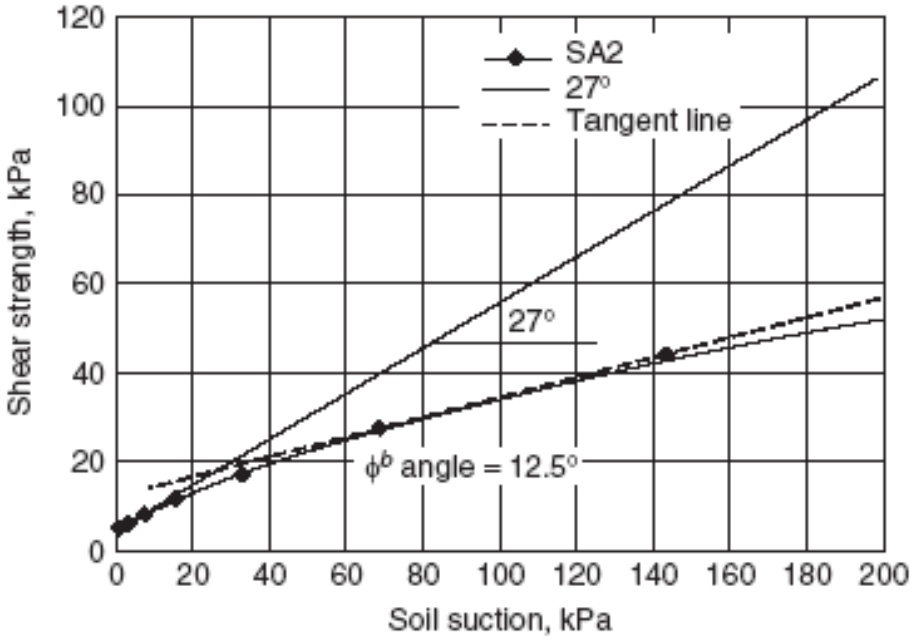


تخمین مقاومت برشی

- نتایج نشان می دهد که مقاومت برشی در مقادیر مکش کمتر از مکش ورودی هوا خطی و مشابه مقاومت برشی خاک اشباع می باشد.
- سپس نمودار منحنی شکل می گردد. برای خاک های ریزدانه، در حوالی مکش ماندگار، پوش افقی می گردد.
- اما در خاکهای ماسه ای در همین مکش یا کمتر، شیب منفی و مقاومت افت می کند.
- بدین ترتیب دو نقطه مکش در لحظه ورود هوا و مکش ماندگار دو نقطه اصلی در تغییرات مکش و همچنین مقاومت برشی خاک های غیر اشباع می باشد.

تخمین مقاومت برشی





کاربرد مقاومت برشی

در مسائل مهندسی موارد زیر قابل طرح است:

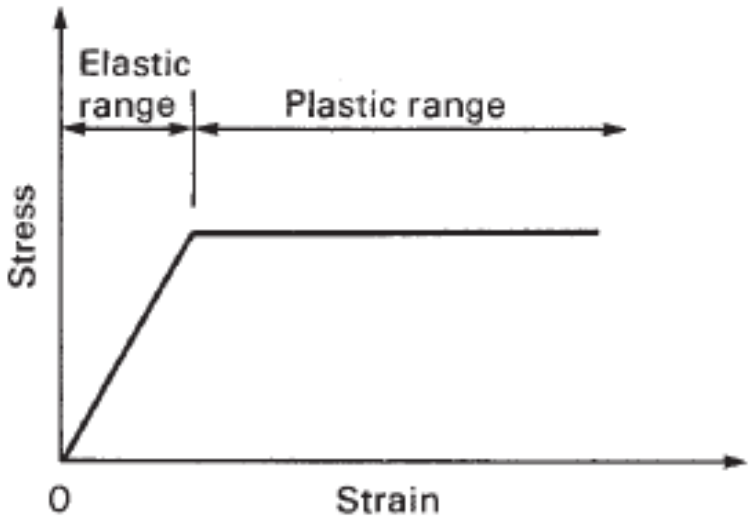
- چنانچه برای خاک بالای تراز آب زیر زمینی مکش در نظر گرفته شود پایداری افزایش می یابد.
- با در نظر گرفتن مقدار کم برای مکش، فشار جانبی خاک در حالت محرک بیشتر و در حالت مقاوم کمتر تخمین زده می شود.
- به طورکلی تغییرات فشار آب حفره ای و مکش در پایداری و ضریب اطمینان شیروانی ها تاثیر بسزایی دارد.
- مقاومت برشی خاک ها در مکش کم، دست کم تخمین زده می شود.

کاربرد مقاومت برشی

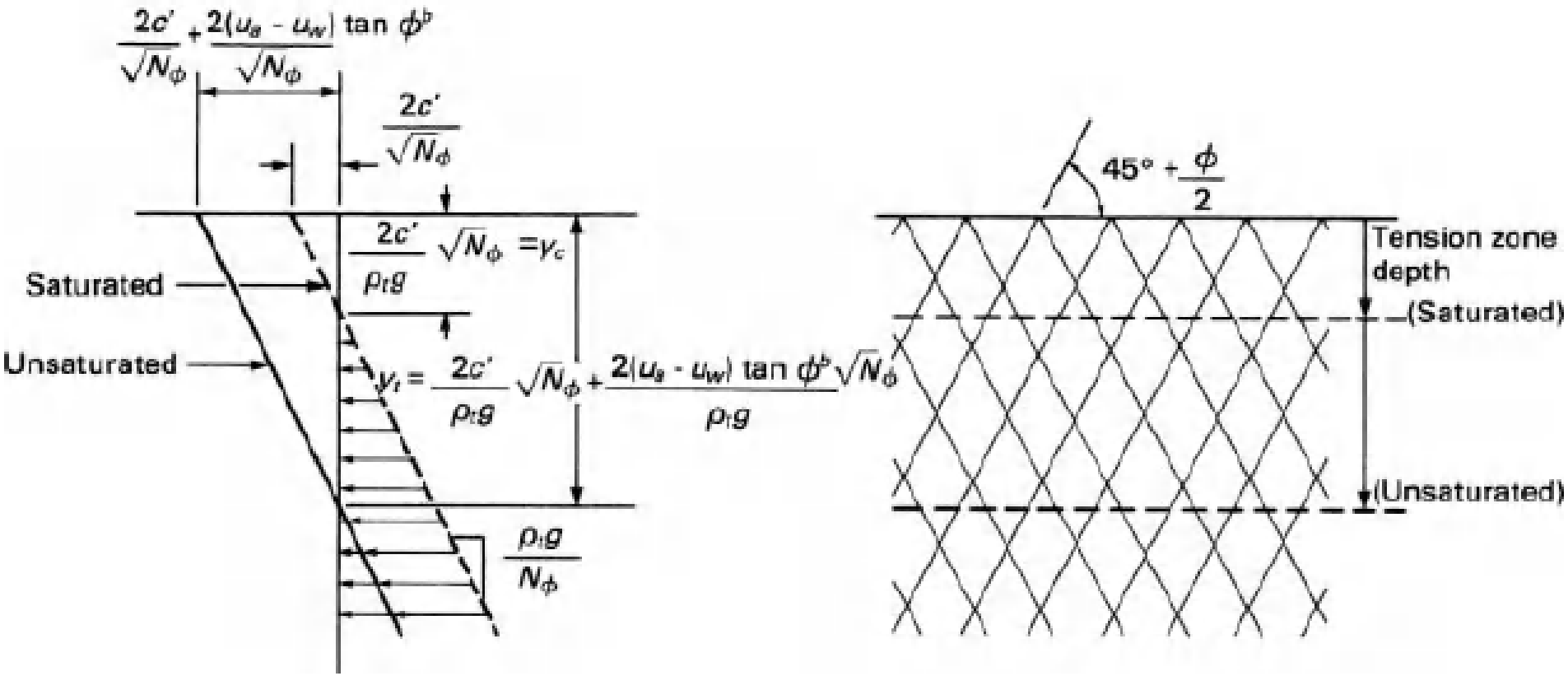
- با استفاده از تئوری خاک غیراشباع و با فرض پوش خطی حالت گسیختگی در خاک غیراشباع می‌توان مسائل مهندسی ژئوتکنیک را بازنگری نمود.

مسائل تعادل حدی (الاستو پلاستیک کامل)

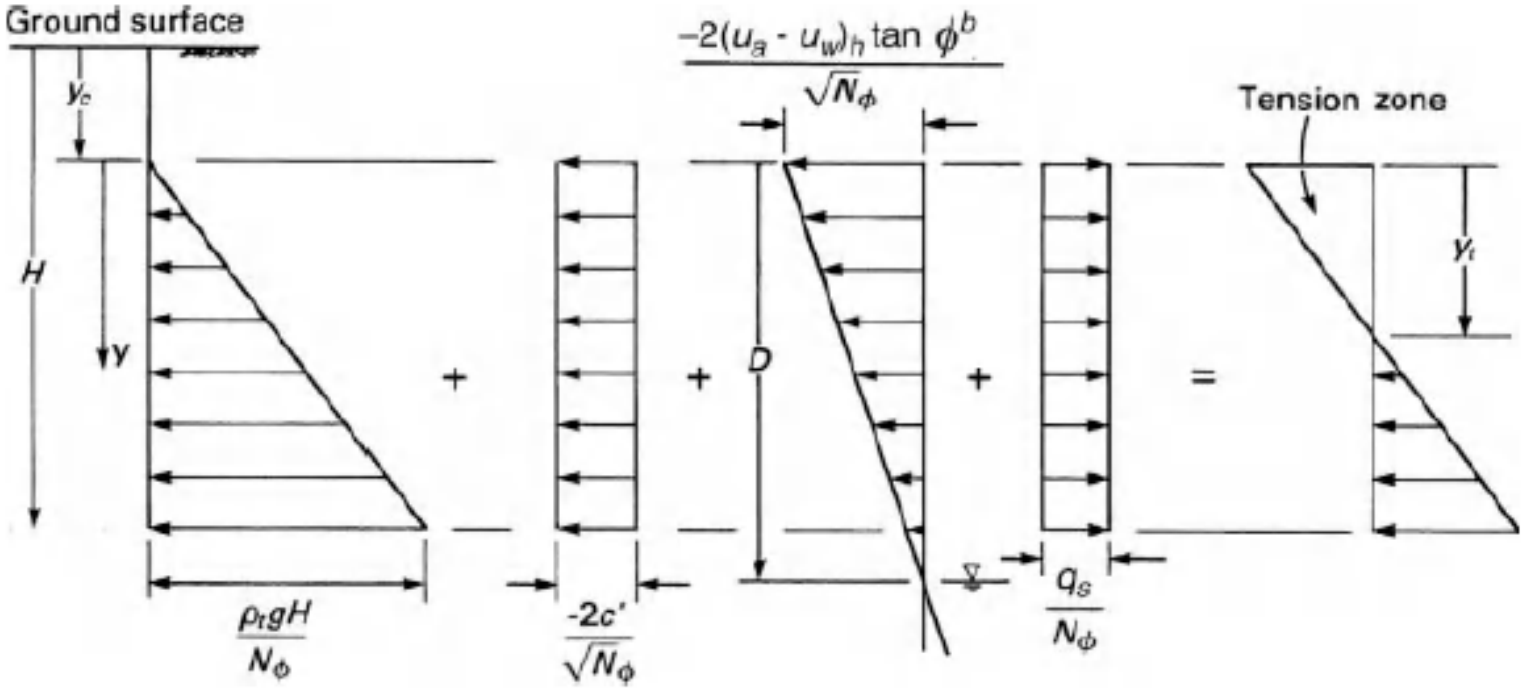
- تحلیل فشار جانبی خاک
- تحلیل ظرفیت باربری
- تحلیل پایداری شیروانی



فشار جانبی خاک

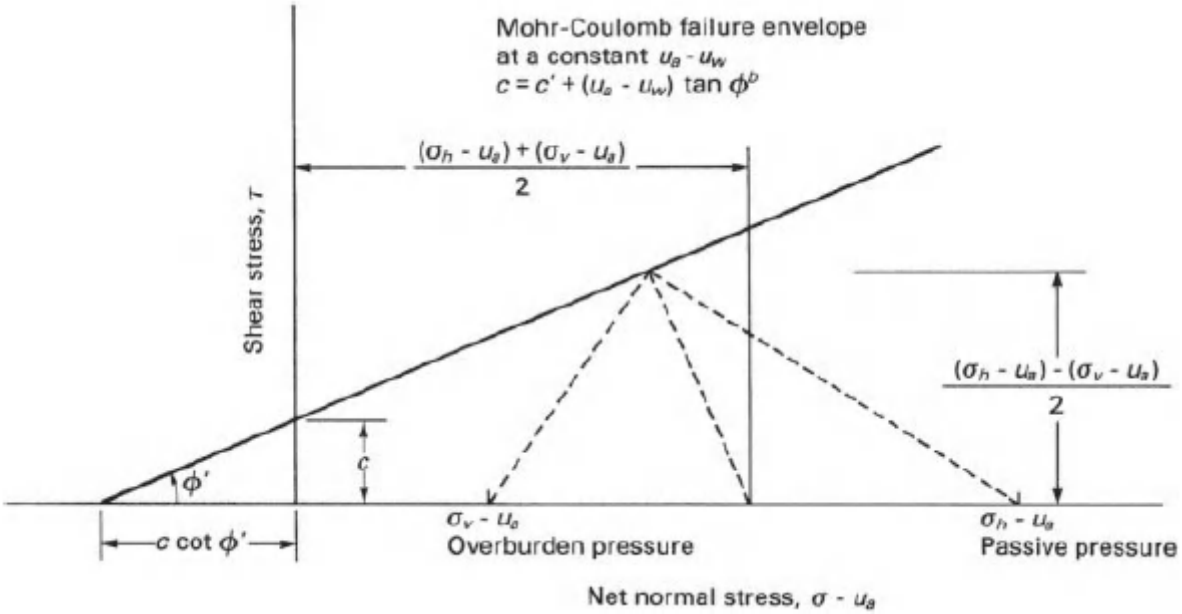


فشار جانبی خاک



فشار جانبی خاک

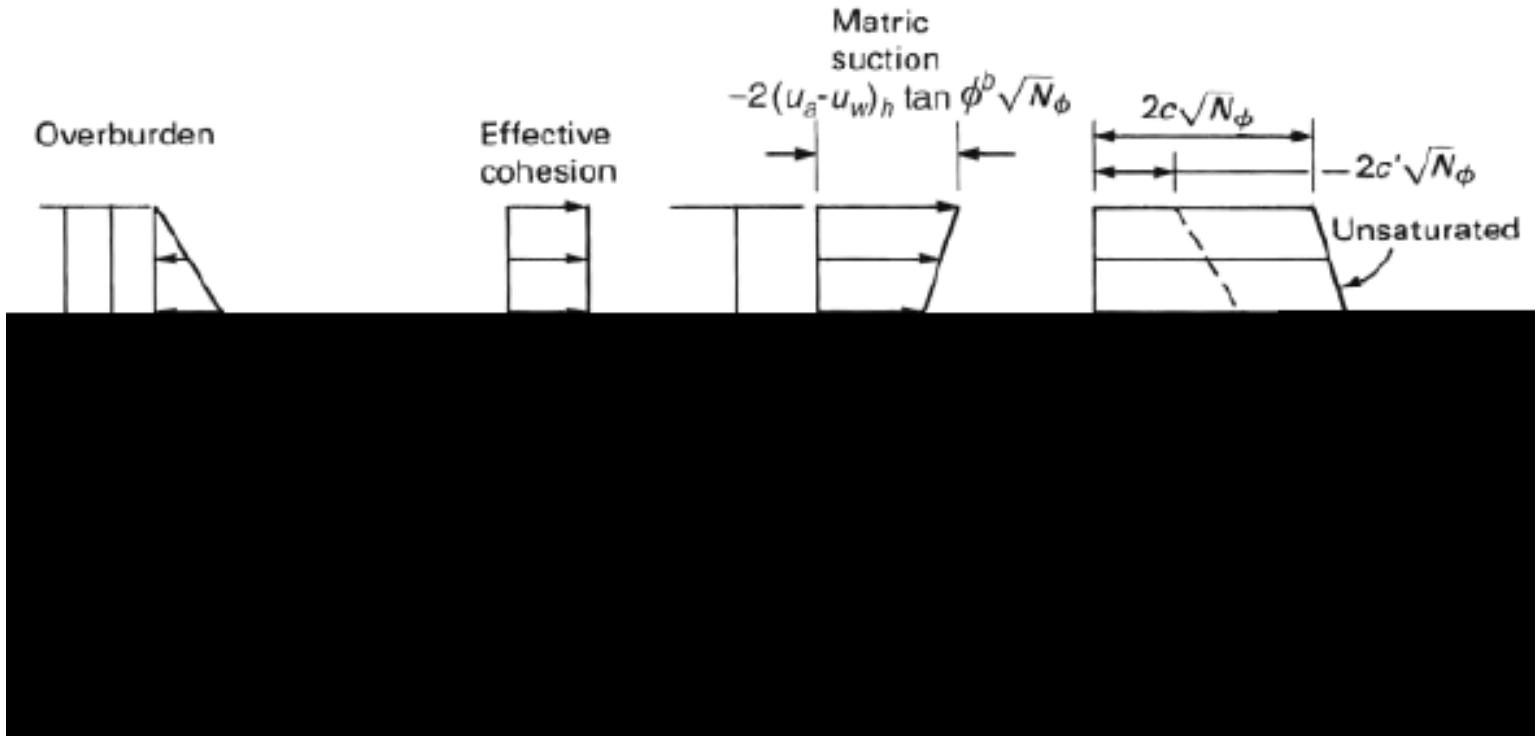
ضریب فشار جانبی در حالت مقاوم



$$\sin \phi' = \frac{[(\sigma_h - u_a) - (\sigma_v - u_a)]/2}{[(\sigma_h - u_a) + (\sigma_v - u_a)]/2} + c \cot \phi'$$

فشار جانبی خاک

مکش متغیر (کاهشی) در عمق



$$p_p = (\sigma_v - u_a)N_\phi + 2c'\sqrt{N_\phi} + 2(u_a - u_w)\tan\phi^b\left(1-\frac{y}{D}\right)\sqrt{N_\phi}$$

ظرفیت باربری خاک

- ظرفیت باربری خاک غیر اشباع از رابطه زیر قابل محاسبه است

$$q_f = 0.5B.\gamma.N_\gamma.\lambda_\gamma + \lambda_c c N_c + \gamma D_f N_q$$

$\lambda_\gamma, \lambda_c$ = shape factors.

N_γ, N_c, N_q = dimensionless coefficients related to angle of internal friction.

c = total cohesion of the soil.

- باید توجه نمود که تخمین نیروی مکش متریک مقداری با خطا رو به رو خواهد بود و معمولا باید ضریب اطمینان مناسب به مقدار اندازه‌گیری شده اعمال شود.

ظرفیت باربری خاک

- رابطه، میزان تغییر ظرفیت باربری خاک رسی غیر اشباع در نتیجه تغییر مکش متریک را محاسبه می نماید.

$$\frac{\Delta q_f}{(q_f)_0} = \frac{\Delta(u_a - u_w)}{(c_u)_0} \tan \phi_b$$

$\Delta q_f / q_{f0}$ = percent change in the ultimate bearing capacity and

$\Delta(u_a - u_w)/c_{u0}$ = percent change in the matric suction with respect to the initial undrained shear strength.

تحلیل عددی مسائل دینامیکی

(تحلیل وابسته به زمان)

تحلیل بسیاری از مسائل در مهندسی به گونه ای است که شرایط مسأله با زمان تغییر نموده و تحلیل این گونه مسائل را می‌توان وابسته به زمان در نظر گرفت. برای مثال شرایط حاکم بر یک مجموعه در زمان $t=0$ تعریف شده و با تغییرات در طول زمان شرایط بعدی مجموعه مورد جستجو می‌باشد. مثالهایی از این گونه مسائل را می‌توان بصورت تحلیل حرکت موج در محیطهای مختلف و یا رفتار دینامیکی سازه ها و یا هدایت گرما و . . . . معرفی نمود. تحلیل این گونه مسائل طبیعتا در دامنه زمان براساس منفک سازی حل معادلات دیفرانسیل پاره ای در پله های زمانی که به سری معادلات دیفرانسیل معمولی مبدل می‌شوند صورت خواهد پذیرفت.

منفک سازی در حل مسائل با شرایط مرزی

حل مسائل در قالب تحلیل سری معادلات دیفرانسیل معمولی زیر صورت می‌پذیرفت:

در دامنه Ω $\quad \mathscr{L}\phi + P = 0$

در دامنه Γ $\quad m\phi + r = 0$

جهت حل از سری توابع آزمایشی:

$$\phi \cong \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m N_m$$

توابع آزمایشی N_m در فضای مختلف مسأله تعریف شده و مقادیر α_m را بصورت اعداد ثابت بدست می‌آمدند. نهایتا حل مسأله منجر به تحلیل سری معادلات جبری خطی زیر می‌گردید:

$$Ka = f$$

با حل این معادلات ضرایب $\{a_m; m = 1,2,\ldots\ldots,M\}$ بدست می‌آیند.

اگرمقادیر α_m را بصورت توابعی از y فرض نموده و انتخاب توابع آزمایشی در دامنه $\overline{\Omega}$ را توابعی از z,x در نظر گرفت.

$$\phi \cong \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m(y) N_m(x,z)$$

توابع N_m, ψ به گونه ای بایستی باشند که شرایط مرزی مورد نیاز در دامنه $\overline{\Omega}$ را ارضاء نماید. با کاربرد روش وزنه پس ماند ضرایب α_m بر حسب y بایستی محاسبه شده و معادلات حاصله بشکل یک سری معادله معمولی زوج شده بر حسب y با متغیرهای مستقل بدست می‌آید.

$$Ka + c\frac{da}{dy} + \ldots\ldots = f$$

مرتبه معادله فوق برابر بزرگترین مرتبه از y در قالب معادله کلی می‌باشد. در صورتیکه دامنه مستقل از y باشد مسأله حالت ویژه منشوری (*Prismatic*) خواهد داشت. ضرایب در معادله فوق مستقل از y بوده و چنین مجموعه‌ای اساسا بروش مستقیم تحلیل خواهد شد. جزئیات این روش تحلیلی را می‌توان درحل مسأله پیچش مورد بررسی قرار داد.

مثال ۱ : مطلوبست حل معادله $\partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2 = -2$ دامنه مستقل بصورت $-3 \le x \le 3$ $-2 \le y \le 2$ با شرط $\phi = 0$ در مرزهای مستطیل که همان مسأله پیچش می‌باشد.

با بکارگیری توابع آزمایشی پیوسته بر روی دامنه و تلاش در جهت حل می‌توان سری یر را در نظر گرفت:

$$\phi \simeq \hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^{M} a_m(y) N_m(x)$$

دامنه $\overline{\Omega}$ دارای تغییرات x بصورت $-3 \le x \le 3$ وشرایط مرزی در دو انتهای این دامنه با انتخاب $\psi = 0$ و توابع شکل $N_m = 0$ در $x = \pm 3$ می‌باشد. لازم به ذکر است که پاسخ مسأله حول $x=0$ قرینه بوده و توابع آزمایشی بصورت زیر قابل تعریف است:

$$N_m(x) = x^{2(m-1)}\left(9 - x^2\right), \quad m = 1.2.....$$

این شرایط در جهت ارضاء شرایط مرزی در $x = \pm 3$ و تقارن مسأله بوده و تابع تقریب بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\hat{\phi} = \sum_{m=1}^{M} a_m(y) x^{2(m-1)}\left(9 - x^2\right)$$

شرایط مرزی در مرزهای $y=\pm 2$ با توابع $a_m(y)$ ارضاء می‌شود.

برای: $y=\pm 2$ $\quad m=1,2,\ldots\ldots,M$ $\quad a_m(y)=0$

در صورتیکه یک جمله در مجموعه تقریب در نظر گرفته شود، پس ماند $R_{\overline{\Omega}}$ را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$R_{\overline{\Omega}}=\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\hat{\phi}}{\partial y^2}+2=-2a_1+\left(9-x^2\right)\frac{d^2a_1}{dy^2}+2$$

روش وزنه پس ماند را می‌توان مطابق گذشته در این مورد بکار گرفت. در این مورد دامنه انتگرال گیری بر روی دامنه $\overline{\Omega}$ یعنی $-3\le x\le 3$ انجام می‌شود. بنابراین جمله وزنه پس ماند با وجود تقارن بصورت زیر است:

$$2\int_0^3\left\{-2a_1+\left(9-x^2\right)\frac{d^2a_1}{dy^2}+2\right\}W_1(x)dx=0$$

با انتخاب $W_1(x)=\delta(x-1.5)$ و تطبیق نقطه ای (*Point cllocation*) با استفاده از روش وزنه پس ماند که در $x=\pm 1.5$ برابر صفر قرار داده می‌شود. یعنی:

$$-2a_1+\frac{27}{4}\frac{d^2a_1}{dy^2}+2=0$$

این معادله را می‌توان با دقت انتگرال گیری نموده و نوشت:

$$a_1 = A\cosh\sqrt{\frac{8}{27}}y + B\sinh\sqrt{\frac{8}{27}}y + 1$$

A و B ثابت بوده و شرایط مرزی برحسب α_1 نتیجه زیر را حاصل می‌نماید:

$$A = -\sec h\sqrt{\frac{32}{27}} \quad , \quad B = 0$$

با استفاده از یک جمله از سری تقریب می‌توان نوشت:

$$\hat{\phi} = \left(1 - \sec h\sqrt{\frac{32}{27}} \quad \cosh\sqrt{\frac{8}{27}}y\right)\left(9 - x^2\right)$$

بر این اساس مقدار گشتاور پیچشی بدست آمده برابر ۷۷/۳۲ و حداکثر تنش برشی برابر ۳/۹۰۱ بوده و در مقایسه با مقادیر دقیق که به ترتیب ۷۶/۴ و ۲/۹۶می باشند خواهد بود.

گسسته سازی پاره ای و حل مسائل وابسته به زمان

در بسیاری از مسائل خطی وابسته به زمان معادله دیفرانسیل حاکم را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\mathscr{L}\phi + \mathscr{P} - \alpha\frac{\partial\phi}{\partial t} - \beta\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0$$

در دامنه Ω

اپراتور $\mathscr{L}$ یک اپراتور خطی شامل دیفرانسیلها بر حسب مختصات و ضرایب β, P, α توابع از پیش تعریف شده از موقعیت و زمان می توانند باشند.

مثال :

ارتعاش عرضی یک نوار کشیده شده با چگالی ρ تحت کشش T از معادله زیر تبعیت می‌نماید:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

معادله

$$\mathscr{L}\phi + \mathscr{P} - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

با فرض:

$$\mathscr{L}\phi = \partial^2\phi \big/ \partial x^2 \quad , \quad \beta = \rho \big/ T \quad , \quad \alpha = \rho = 0$$

در نظر گرفته می‌شود.

مثال :

انتقال حرارت گذرا و خطی در دامنه دو بعدی با ظرفیت حرارتی $\rho\, C$ و ضریب انتقال حرارت k از معادله زیر تبعیت می‌نماید:

$$K\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)+Q-\rho c\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

معادله $\mathscr{L}\phi+\rho-\alpha\frac{\partial\phi}{\partial t}-\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$ با فرض: $\mathscr{L}\phi=k\left(\partial^2\phi/\partial x^2+\partial^2\phi/\partial y^2\right)\ ,\ P=Q\ ,\ \alpha=\rho c\ ,\ \beta=0$

قابل پیگیری است.

مضافا شرایط مربوطه برای پیدا کردن مقدار تابع $\varnothing$ (در صورتیکه $\beta\neq 0$ باشد) $\partial\phi/\partial t$ در تمامی نقاط در دامنه $\overline{\Omega}$ در زمان $t=0$ همراه با شرایط مرزی تعریف شده برای تمامی زمانهای $t\geq 0$ در دامنه $\overline{\Gamma}$ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

کاربرد روش گسسته سازی پاره ای در حل معادله $\mathscr{L}\phi+\rho-\alpha\frac{\partial\phi}{\partial t}-\beta\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=0$ در جهت حل مسائل تعریف شده در قبل بوده که بطور مستقیم در جهت تحلیل مسائل وابسته به زمان در دامنه $\overline{\Omega}$ و غیر وابسته به زمان قابل استفاده است. در این رابطه توابع شکل N_m که توابعی از مختصات می‌باشند، در سری مورد استفاده زیر بکار گرفته می‌شوند:

$$\hat{\phi}=\psi+\sum_{m=1}^{M}a_m(t)N_m(x,y,z)$$

در رابطه فوق $N_m\ ,\psi$ در جهت ارضاء شرایط حدی مسأله در فضای $\overline{\Gamma}$ می‌باشند. کاربرد روش وزنه پس ماند بر روی معادله دیفرانسیل ماتریسی زیر قابل اجرا است:

$$M\frac{d^2a}{dt^2}+C\frac{da}{dt}+Ka=f$$

مؤلفه های ماتریس ها در رابطه فوق بصورت زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$M_{\ell m}=\int_{\overline{\Omega}}\beta W_\ell N_m d\Omega$$

$$C_{\ell m}=\int_{\overline{\Omega}}\alpha W_\ell N_m d\Omega$$

$$k_{\ell m} = -\int_{\overline{\Omega}} W_\ell \mathscr{L} N_m d\Omega \quad ,$$

$$f_\ell = \int_{\overline{\Omega}} \left(P + \mathscr{L}\psi - \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) W_\ell d\Omega$$

برای تکمیل این تحلیل معادله دیفرانسیل معمولی بدست آمده با عنایت به مقادیر اولیه α (در صورتیکه $\beta \neq 0$ باشد.) da/dt داده شده تحلیل می‌گردد. این روش یک روش کلاسیک تحلیل معادلات دیفرانسیل محسوب می‌شود.

مثال ۲ :

مسأله **گذرای انتقال حرارت** در حالت یک بعدی در دامنه $0 \le x \le 1$ مورد نظر است. مشخصات حرارتی بصورت $k = \rho c = 1$ و درجه حرارت اولیه به گونه ای توزیع شده که $\phi = x(1-x)$ می‌باشد. درجه حرارت در $x = 0,1$ ثابت و برابر صفر فرض شده و لازم است تغییر درجه حرارت در زمان های بعدی محاسبه شود. معادله حاکم بر این مسأله بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

شرایط مرزی: $\phi = x(1-x)$ در $t=0$

$\phi = 0$ در $x = 0,1 \ , \ t \ge 0$

در قالب روش اجزاء محدود دامنه فضایی مسأله (دامنه $0 \le x \le 1$) به M جزء خطی با گره های شماره گذاری شده مطابق شکل تقسیم می‌شود. با بکارگیری **روش گسسته سازی پاره ای** با تقریب $\hat{\phi}$ در قالب روش اجزاء محدود مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

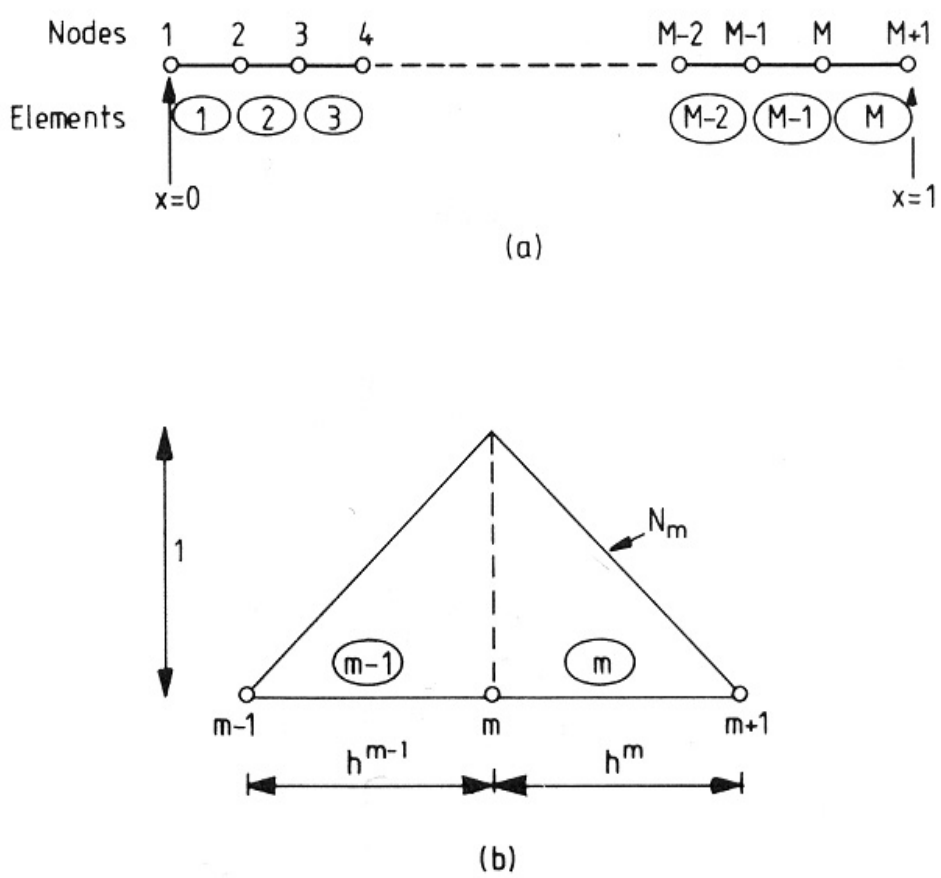
در رابطه فوق ϕ_m تقریب تابع زمان درجه حرارت در گره m بوده و N_m ارائه گر تابع شکل خطی استاندارد بوده که در شکل نشان داده شده است. با کاربرد شرایط مرزی در $x= 0,1$ بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\hat{\phi} = \sum_{m=1}^{M+1} \phi_m(t) N_m(x)$$

$$\phi_1 = \phi_{M+1} = 0$$

در کلیه زمانهای t :

در جهت سهولت بهتر است ϕ_{M+1} , ϕ_1 را بعنوان مجهول در نظر گرفته و با اعمال شرایط مرزی پس از تجمیع اطلاعات بصورت ماتریس تحلیل را دنبال نمود.



a) جزء و شماره گذاری گره ها

b) توابع شکل سازگار در گره m

با کاربرد روش پس ماند گلرکین می‌توان نوشت:

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \hat{\phi}}{\partial x^2} - \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) N_\ell dx = 0 \quad ; \quad \ell = 1,2,\ldots\ldots,M+1$$

با جایگزینی تقریب $\hat{\phi}$ سری معادلات :

$$\sum_{m=1}^{M+1} \left(\int_0^\ell \frac{dN_\ell}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx \right) \phi_m + \sum_{m=1}^{M+1} \left(\int_0^1 N_\ell N_m dx \right) \frac{d\phi_m}{dt} = \left[N_\ell \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right]_0^1 \quad ; \quad \ell = 1,2,\ldots\ldots,M+1$$

معادله فوق را در شکل عمومی زیر می‌توان ارائه نمود:

$$c \frac{d\phi}{dt} + k\phi = f$$

$$c_{\ell m} = \int_0^1 N_\ell N_m dx \quad , \quad k_{\ell m} = \int_0^1 \frac{dN_\ell}{dx} \frac{dN_m}{dx} dx$$

$$f_\ell = \left[\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} N_\ell \right]_0^1 \quad , \quad \phi^T = \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_M, \phi_{M+1}\}$$

با استفاده از اجزاء خطی بردار f دارای مؤلفه های صفر بوده و تنها مؤلفه های غیر صفر بصورت زیر است:

$$f_1 = -\left.\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}\right|_{x=0} \quad , \quad f_{M+1} = \left.\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x}\right|_{x=1}$$

ماتریسهای اجزاء بطور نمونه بصورت زیر می‌باشند:

$$c^e = h^e \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad , \quad k^e = \frac{1}{h^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای K , C را در حالت عمومی روش اجزاء محدود با تجمیع می‌توان حاصل نمود. برای اعمال شرایط حدی عمومی به مجموعه معادلات مربوط به گره 1 , $M+1$ با شرایط $\phi_{M+1} = 0 \ , \ \phi_1 = 0$ حذف شده و تغییرات زمانی درجه حرارت در گره ها را می‌توان با معادلات باقیمانده محاسبه نمود. این روش را می‌توان با انتخاب دو جزء خطی با طولهای برابر در حالیکه بصورت زیر تحلیل نمود.

$$h^1 = h^2 = \frac{1}{2} \quad , \quad M = 2$$

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{d\phi_1}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \\ \frac{d\phi_3}{dt} \end{Bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right|_{x=0} \\ 0 \\ \left.\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right|_{x=1} \end{Bmatrix}$$

با توجه به شرایط مرزی در $x= 0,1$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{d\phi_2}{dt} \\ 0 \end{Bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0 \\ \phi_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\left.\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right|_{x=0} \\ 0 \\ \left.\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x}\right|_{x=1} \end{Bmatrix}$$

در این حالت رفتار مجهول ϕ_2 براساس معادله دومی بصورت $\frac{1}{3}\frac{d\phi_2}{dt} + 4\phi_2 = 0$ بوده و پاسخ $\phi_2 = Ae^{-12t}$ در حالیکه A یک ثابت بوده و ϕ_2 با مقدار معلوم آن در $t=0$ بصورت $A = \frac{1}{4}$ است تطبیق می نماید. معادله اول و سوم را می‌توان بکار گرفته و بطور تقریبی فلاکس حرارتی با تغییر زمان را در پهنه مرزهای $x= 0,1$ بدست آورد.

روش تحلیلی

براساس بخش قبلی **گسسته کردن پاره‌ای معادلات** حاکم در مسائل وابسته به زمان را می‌توان به سری معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل نموده و فرم کلی معادله زیر را حاصل نمود.

$$M\frac{d^2a}{dt^2}+C\frac{da}{dt}+Ka=f$$

عموما با بکارگیری روش گلرکین ماتریسهای K,C,M متقارن می‌باشند. حال به روش تحلیلی می‌توان حل معادلات دیفرانسیل معمولی را مورد ارزیابی قرار داد. در یک حالت عمومی، **سری معادلات ممکن است عملکرد غیر خطی داشته** (برای نمونه مسأله انتقال حرارت در حالت گذرا در حالیکه ضریب انتقال حرارت بر حسب درجه حرارت تغییر نماید.) اما در این بحث می‌توان بر روی مجموعه های خطی تمرکز نموده که بصورت تحلیلی عموما در این مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

معادلات مرتبه اول

معادلات عمومی خطی از مرتبه اول نسبت به زمان را در حالت گسسته سازی شده بصورت زیر می‌توان نوشت:

در دامنه Ω :

$$\mathscr{L}\phi + P - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

تابع تقریب بصورت $\hat{\phi}$ مورد استفاده قرار گرفته و نتیجه بصورت معادلات زوج شده حاکم بر مجموعه بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$C\frac{da}{dt} + Ka = f$$

شرایط اولیه و ارائه مقادیر $\varnothing$ در سراسر پهنه دامنه در زمان $t=0$ لزوم تعریف مقدار اولیه α بصورت α^0 را روشن می‌سازد. با فرض تقسیم دامنه زمانی با اجزاء خطی مطابق شکل، در قالب روش اجزاء محدود سری زیر را می‌توان در نظر گرفت:

$$a \simeq \hat{a} = \sum_{m=1}^{\infty} a^m N_m$$

در رابطه فوق a^m بیانگر مقدار تقریبی a در گره m در زمان $t=t_m$ است. باتوجه به کاربرد توابع شکل یکسان N_m برای تغییرات مؤلفه های α در معادله سری پاسخ تابع شکل N_m دارای یک مقدار اسکالر می‌باشد. برای جزء خطی در زمان n همراه با گره های مربوطه در زمان $t=t_n$ و $t=t_{n+1}$ می‌توان شکل را در نظر گرفت. برای چنین جزئی می‌توان نوشت:

$$\hat{a} = a^n N_n^n + a^{n+1} N_{n+1}^n$$

با توجه به اینکه سایر توابع آزمایشی اجزاء دیگربرای جزء n برابر صفر می‌باشند، می‌توان نوشت:

$$N_n^n = 1 - T \quad , \quad \frac{dN_n^n}{dt} = \frac{-1}{\Delta t_n}$$

$$N_{n+1}^n = T \quad , \quad \frac{dN_{n+1}^n}{dt} = \frac{1}{\Delta t_n}$$

$$T = \frac{t - t_n}{\Delta t_n} \quad , \quad \Delta t_n = t_{n+1} - t_n$$

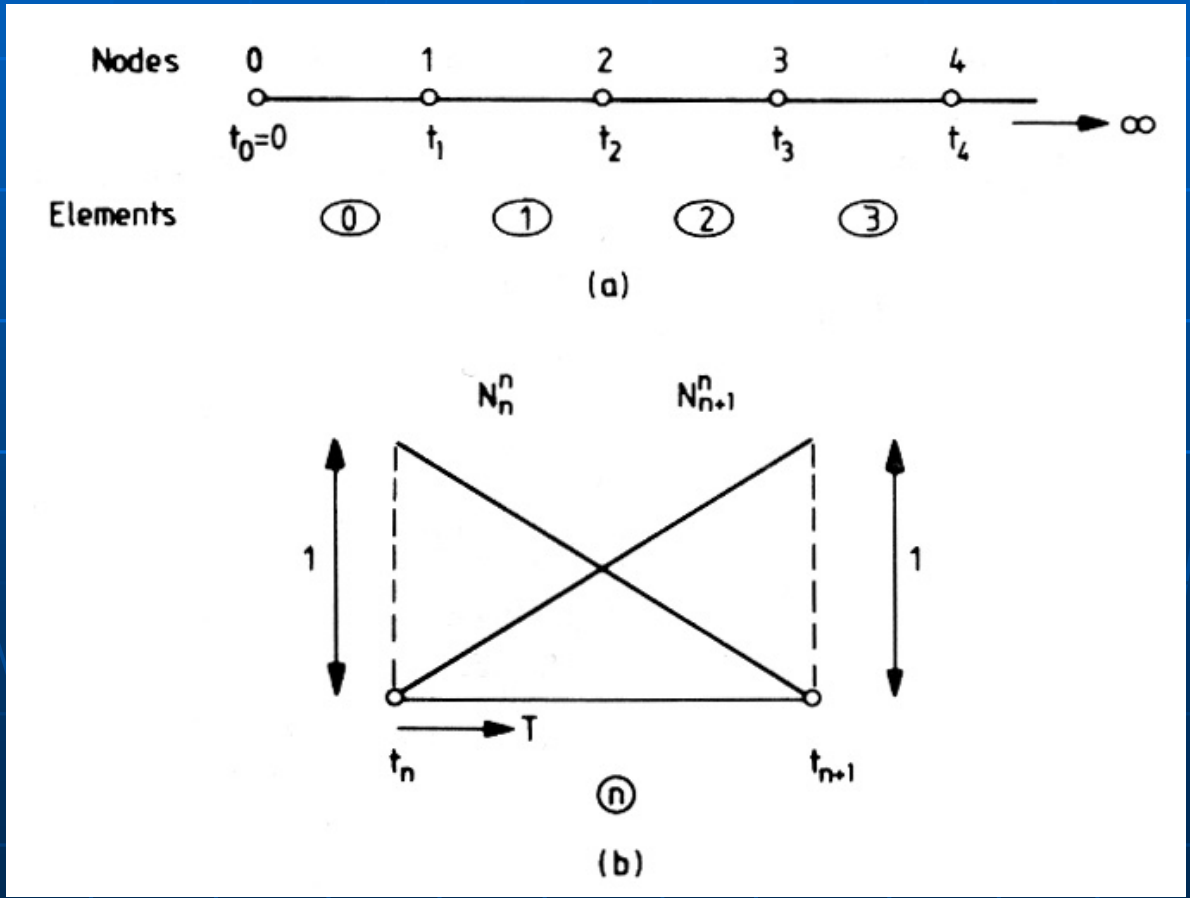
روش استاندارد وزنه پس ماند را می‌توان بر روی معادله اصلی بکار گرفته و نوشت:

$$\int_0^\infty \left(C\frac{d\hat{a}}{dt} + K\hat{a} - f \right) W_n dt = 0 \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots\ldots$$

در صورتیکه تابع وزنه بصورت W_n بصورت زیر تعریف شود :

$$W_n = 0 \quad , \quad t < t_n \quad , \quad t > t_{n+1}$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \left(C\frac{d\hat{a}}{dt} + K\hat{a} - f(t) \right) W_n dt = 0 \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots\ldots$$



a) تقسیمات در دامنه زمان بصورت اجزاء خطی b) توابع شکل اجزاء در جزء زمانی ***n***

عملیات انتگرال گیری را می‌توان فقط بر روی جزء **n** مطابق رابطه $\hat{a} = a^n N_n^n + a^{n+1} N_{n+1}^n$ گسترش و انجام داده و بجای مقدار $\hat{a}$ در این جمله جایگزین نمود. با بکارگیری توابع شکل تعریف شده دربالا جمله وزنه پس ماند بصورت زیر است:

$$\int_0^1 \left[\frac{C}{\Delta t_n}\left(-a^n + a^{n+1}\right) + K\left\{a^n\left(1-T\right) + a^{n+1}T\right\} - f\left(t_n + \Delta t_n T\right)\right] W_n dT = 0 \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots$$

در صورتیکه ماتریسهای C, K با مؤلفه های ثابت بر روی جزء فرض شوند می‌توان نوشت:

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n}\int_0^1 W_n dT + K\int_0^1 T W_n dT\right\} a^{n+1} + \left\{-\frac{C}{\Delta t_n}\int_0^1 W_n dT + K\int_0^1 \left(1-T\right) W_n dT\right\} a^n =$$

$$= \int_0^1 f\left(t_n + T\Delta t_n\right) W_n dT$$

چنین رابطه ای بر روی جزء n حاکمیت داشته و می‌توان با انتخاب مناسب توابع وزنه W_n مقادیر ضرایب $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ را که از مقدار α درزمان شروع آغاز می‌شود را بدست آورد.

معادله فوق می‌تواند ارتباط a^{n+1} , a^n را بعنوان مقادیر معلوم در دو تراز زمانی مشخص نماید. این معادله را می‌توان بر حسب هر تابع وزنه ای بصورت زیر نوشت:

$$\left(\frac{C}{\Delta t_n}+\gamma_n K\right)a^{n+1}+\left(-\frac{C}{\Delta t_n}+(1-\gamma_n)K\right)a^n=\bar{f}^n$$

$$\gamma_n=\frac{\int_0^1 W_n T dT}{\int_0^1 W_n dT}$$

$$\bar{f}^n=\frac{\int_0^1 W_n f(t_n+T\Delta t_n)dT}{\int_0^1 W_n dT}$$

در صورتیکه تابع معلوم f بطور آرام با زمان تغییر نماید، آنرا به سادگی برای تغییرات بر روی جزء n در قالب تغییرات مصنوعی $\hat{a}$ در نظر گرفته و نوشت:

$$f(t_n+T\Delta t_n)\simeq f^n N_n^n(T)+f^{n+1}N_{n+1}^n(T)\ ,\quad 0\le T\le 1$$

$$\bar{f}^n=(1-\gamma_n)f^n+\gamma_n f^{n+1}$$

روابط حاکم قابل تعریف در a^{n+1} بر حسب a^n مطابق معادله:

$$\left(\frac{C}{\Delta t_n}+\gamma_n K\right)a^{n+1}+\left(-\frac{C}{\Delta t_n}+(1-\gamma_n)K\right)a^n=\overline{f}^n$$

را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n}+\gamma_n K\right\}a^{n+1}+\left\{-\frac{C}{\Delta t_n}+(1-\gamma_n)K\right\}a^n=(1-\gamma_n)f^n+\gamma_n f^{n+1}$$

در صورتیکه بکارگیری تناسب در معادله

$$f(t_n+T\Delta t_n)\simeq f^n N_n^n(T)+f^{n+1}N_{n+1}^n(T)\ ,\quad 0\le T\le 1$$

بعلت طبیعت تغییرات تابع f بر روی **جزء n** مورد پذیرش نباشد (برای نمونه در مجموعه مورد دریافت **ضربه**) سپس معادله:

$$\overline{f}^n=\frac{\int_0^1 W_n f(t_n+T\Delta t_n)dT}{\int_0^1 W_n dT}$$

را می‌توان برای نتیجه دقیق بکار گرفت.

روشهای بخصوص برای معادلات مرتبه اول

با انتخاب های گوناگون توابع وزنه W_n در معادله $\gamma_n = \frac{\int_0^1 W_n T dT}{\int_0^1 W_n dT}$ ، می‌توان روشهای حل متفاوتی را ارائه نمود. در صورتیکه از **روش تطبیق نقطه ای** برای هر جزء استفاده شود، این بدان معنی است که $W_n = \delta(T-\theta)$ برای $n = 0,1,2,3,\ldots$ بوده و سپس می توان انتگرال معادله یادشده را مستقیما بکار گرفته و رابطه زیر را ارائه نمود:

$$\gamma_n = \frac{\int_0^1 W_n T dT}{\int_0^1 W_n dT} = \theta$$

معادله:

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n} + \gamma_n K\right\} a^{n+1} + \left\{-\frac{C}{\Delta t_n} + (1-\gamma_n)K\right\} a^n = (1-\gamma_n) f^n + \gamma_n f^{n+1}$$

نیز بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n} + \theta K\right\} a^{n+1} + \left\{-\frac{C}{\Delta t_n} + (1-\theta)K\right\} a^n = (1-\theta) f^n + \theta f^{n+1}$$

این روابط براساس معادله $C\frac{da}{dt} + Ka = f$ در قالب روش اجزاء محدود بدست آمده اند. راهی دیگر که بطور وسیع مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش اختلاف محدود است که می‌توان در این معادله بکار گرفت.

با علامت گذاری نقاط زمانی t_0 , t_1 , t_2 و . . . . بر روی محور زمان می‌توان نوشت:

$$C\frac{da}{dt}\bigg|^{n+\theta} + Ka^{n+\theta} = f^{n+\theta}$$

پسوند $n+\theta$ بیانگر مقدار در زمان $t = t_n + \theta\Delta t_n$ در حالیکه $0 \le \theta \le 1$ است می‌باشد. با بکارگیری سری تیلور می‌توان نتیجه گرفت:

$$a^n = a^{n+\theta} - \theta\Delta t_n \frac{da}{dt}\bigg|^{n+\theta} + \frac{\theta^2\Delta t_n^2}{2}\frac{d^2a}{dt^2}\bigg|^{n+\theta} - \frac{\theta^3\Delta t_n^3}{6}\frac{d^3a}{dt^3}\bigg|^{n+\theta_1}$$

$$a^{n+1} = a^{n+\theta} + (1-\theta)\Delta t_n \frac{da}{dt}\bigg|^{n+\theta} + \frac{(1-\theta)^2\Delta t_n^2}{2}\frac{d^2a}{dt^2}\bigg|^{n+\theta} + \frac{(1-\theta)^3\Delta t_n^3}{6}\frac{d^3a}{dt^3}\bigg|^{n+\theta_2}$$

از تجمع دو معادله فوق می‌توان تقریب زیر را نتیجه گرفت:

$$\frac{da}{dt}\bigg|^{n+\theta} \simeq \frac{a^{n+1} - a^n}{\Delta t_n}$$

با توجه به مقدار خطای E در تقریب فوق می‌توان نوشت:

$$E = \left\{(1-\theta)^2 - \theta^2\right\}\frac{\Delta t_n}{2}\frac{d^2a}{dt^2}\bigg|^{n+\theta} + \frac{\Delta t_n^2}{6}\left\{(1-\theta)^3\frac{d^3a}{dt^3}\bigg|^{n+\theta_2} + \theta^3\frac{d^3a}{dt^3}\bigg|^{n+\theta_1}\right\}$$

لازم به یادآوری است که E بصورت $O(\Delta t_n^2)$ بوده و در صورتیکه $\theta=\frac{1}{2}$ باشد E بصورت $O(\Delta t_n)$ است.

با ضرب معادله:

$$a^n = a^{n+\theta} - \theta\Delta t_n \left.\frac{da}{dt}\right|^{n+\theta} + \frac{\theta^2\Delta t_n^2}{2}\left.\frac{d^2a}{dt^2}\right|^{n+\theta} - \frac{\theta^3\Delta t_n^3}{6}\left.\frac{d^3a}{dt^3}\right|^{n+\theta_1}$$

در $(1-\theta)$،

و معادله:

$$a^{n+1} = a^{n+\theta} + (1-\theta)\Delta t_n \left.\frac{da}{dt}\right|^{n+\theta} + \frac{(1-\theta)^2\Delta t_n^2}{2}\left.\frac{d^2a}{dt^2}\right|^{n+\theta} + \frac{(1-\theta)^3\Delta t_n^3}{6}\left.\frac{d^3a}{dt^3}\right|^{n+\theta_2}$$

در θ و جمع دو معادله می‌توان نوشت:

$$a^{n+\theta} \simeq (1-\theta)a^n + \theta a^{n+1}$$

در این صورت خطا بصورت $O(\Delta t_n^2)$ است. در صورتیکه تقریب معادلات قبلی در معادله

$$C\left.\frac{da}{dt}\right|^{n+\theta} + Ka^{n+\theta} = f^{n+\theta}$$

بکار گرفته شده و نتیجه $f^{n+\theta}$ برای $a^{n+\theta}$ در معادله فوق منظور شود، نتیجه بصورت زیر است:

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n} + \theta K\right\}a^{n+1} + \left\{-\frac{C}{\Delta t_n} + (1-\theta)K\right\}a^n = (1-\theta)f^n + \theta f^{n+1}$$

رابطه بدست آمده همان نتیجه حاصل از روش اجزاء محدود مطابق رابطه :

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n}+\theta K\right\}a^{n+1}+\left\{-\frac{C}{\Delta t_n}+(1-\theta)K\right\}a^{n}=(1-\theta)f^{n}+\theta f^{n+1}$$

است. در صورتیکه نقاط تطبیق θ در هر جزء بطور مناسب انتخاب شوند،
می‌توان معادله فوق را که متعلق به روش اختلاف محدود برای حل رابطه:

$$C\frac{da}{dt}+Ka=f$$

می‌باشد در حالات زیر بدست آورد:

۱- حالت اختلاف به جلو (Forward Difference)

۲- روش میان اختلاف (Crank – Nicolson)

۳- روش اختلاف عقب (Back ward Differace)

۱- حالت اختلاف به جلو

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n}+\theta K\right\}a^{n+1}+\left\{-\frac{C}{\Delta t_n}+(1-\theta)K\right\}a^n=(1-\theta)f^n+\theta f^{n+1}$$

این حالت با جایگزینی $\theta=0$ در معادله :
بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{C}{\Delta t_n}a^{n+1}+\left(-\frac{C}{\Delta t_n}K\right)a^n=f^n$$

در صورتیکه ماتریس C قطری باشد، به سادگی می‌توان معکوس C^{-1} را بدست آورد.
این روش ضمنی نامیده شده زیرا α^{n+1} مستقیما بر حسب α^n از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$a^{n+1}=\Delta t_n C^{-1}\left\{\left(\frac{C}{\Delta t_n}-K\right)a^n+f^n\right\}$$

می‌توان نشان داد که با وجود مزایایی که کاربرد روش ضمنی در حل معادله فوق دارد، نارسائیهایی نیز در انتخاب طول پله زمانی Δt_n وجود خواهد داشت. ماتریس C در صورتی قطری می‌شود که گسسته سازی به روش اختلاف محدود در فضای هندسی صورت گیرد. در صورتیکه این گسسته سازی در قالب روش اجزاء محدود انجام شود ماتریس C قطری نخواهد شد. و دیگر شرائط حاصله در اثرکاربرد روش ضمنی در این قطری سازی مؤثر نخواهد بود.

$$C_{\ell m}=\int_{\Omega}\alpha W_\ell N_m d\Omega$$

تلاشهای مستمری در جهت قطری سازی ماتریس C صورت پذیرفته است. برای نمونه می‌توان مسأله یک بعدی با اجزاء دو گرهی خطی را در نظر گرفت.

با بکارگیری روش گلرکین در این حالت ماتریس C^e برای جزء e با شماره گره های i , j بصورت زیر است:

$$C^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \alpha\left(N_i^e\right)^2 & \alpha N_i^e N_j^e \\ \alpha N_j^e N_i^e & \alpha\left(N_j^e\right)^2 \end{bmatrix} dx$$

مؤلفه های این ماتریس با انتگرال گیری عددی محاسبه شده و با استفاده از سری انتگرال عددی یک بعدی و نقاط مبنا بر روی گره ها می‌توان نوشت:

$$\int_{\Omega^e} \alpha N_i^e N_j^e dx = \frac{h^e}{2}\left\{\left(\alpha N_i^e N_j^e\right)_{i\ \text{گره}} + \left(\alpha N_i^e N_j^e\right)\right\}_{j\ \text{گره}} = 0$$

در این حالت C^e و همچنین ماتریس کلی C قطری خواهند شد. عمل متمرکز سازی ماتریس(Lumped matrix) و آثار آن در تحلیل مسائل در کتاب زینکویچ آمده است.

۲- روش میان اختلاف (Crank – Nicolson)

با فرض $\theta = \frac{1}{2}$ در معادله :

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n} + \theta K\right\} a^{n+1} + \left\{-\frac{C}{\Delta t_n} + (1-\theta)K\right\} a^n = (1-\theta) f^n + \theta f^{n+1}$$

می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{C}{\Delta t_n} + \frac{1}{2}K\right) a^{n+1} + \left(-\frac{C}{\Delta t_n} + \frac{1}{2}K\right) a^n = \frac{1}{2} f^n + \frac{1}{2} f^{n+1}$$

این روش اشاره‌ای نامیده شده و تحلیل با ماتریسهای غیر قطری در معادلات بایستی منجر به بدست آوردن α^{n+1} گردد.

۳- روش اختلاف عقب (Back ward Differace)

با قرار دادن $\theta = 1$ در معادله

$$\left\{\frac{C}{\Delta t_n} + \theta K\right\} a^{n+1} + \left\{-\frac{C}{\Delta t_n} + (1-\theta)K\right\} a^n = (1-\theta) f^n + \theta f^{n+1}$$

تحلیل به روش اشاره‌ای حاصل می‌شود. رابطه حاصل در این مورد بصورت زیر است:

$$\left(\frac{C}{\Delta t_n} + K\right) a^{n+1} - \frac{C}{\Delta t_n} a^n = f^{n+1}$$

یک روش در حل مسأله به طریقه تطبیق نقاط روش گلرکین بر روی تمامی اجزاء است. اجرای این روش در قالب $W_n = N_n^n$ و یا $W_n = N_{n+1}^n$ بر روی جزء n است. این روش وزنه در فضای دامنه عملکرد معادله اصلی صورت پذیرفته و با فرض:

$W_n = N_{n+1}^n$ نتایج حاصله مطابق روش تطبیق نقاط در $T = \frac{2}{3}$ روی هر جزء است.